CALCUL INTÉGRAL

1ère année

1847-1848

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Calcul Intégral.

Dans le calcul différentielle, on se propose étant donnée une fonction, de trouver sa différentielle; le but du calcul intégral est au contraire de revenir de la différentielle à la fonction.

Nous indiquerons la fonction qui a pour différentielle $f(x)dx$ par le symbole $\int f(x)dx$, qu'on appelle <u>somme</u> ou <u>intégrale</u> de $f(x)dx$; $F(x)$ étant cette intégrale, nous aurons donc :

$$\int f(x)dx = F(x).$$

A une fonction ne correspond en général qu'une seule différentielle, mais à une différentielle correspondent une infinité d'intégrales; ainsi $F(x)$ ayant pour différentielle $f(x)dx$, nous aurons une infinité d'autres fonctions ayant même différentielle et comprises toutes dans la formule $F(x)+C$, C indiquant une quantité constante. Si l'on admet, en effet qu'une fonction non comprise dans cette formule ait même différentielle que $F(x)$ nous pourrons la représenter par $F(x)+\varphi(x)$ et nous aurons :

$$d\left[F(x)+\varphi(x)\right] = f(x)dx = d\,F(x)$$

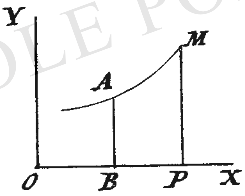
$$\text{ou}\quad d\,F(x) + d\varphi(x) = d\,F(x)$$

Donc $d\varphi(x)=0$; par conséquent $\varphi(x)=C$.

Toute différentielle $f(x)dx$, réelle et finie pour les valeurs de x voisines de celle que l'on considère, a une intégrale.

En effet je construis la courbe $y=f(x)$ que je supposerai n'être pas constamment discontinue dans le

voisinage du point M correspondant à une abscisse



$OP = X$. Je pourrai toujours prendre un point A assez rapproché de M, pour que de A à M j'ai une courbe continue et dont les coordonnées soient finies. Or, d'après ce que nous avons vu aire $d\,ABPM = f(x)dx$ donc aire $ABPM = \int f(x)dx$; or l'aire étant une fonction de l'abscisse, il s'en suit que $\int f(x)dx = F(x)$. Comme le point B peut avoir une infinité de positions, cette égalité exprime en même temps l'indétermination de l'intégrale.

Le théorème est encore vrai pour $\left[f_1(x) + \sqrt{-1}\,f_2(x)\right]dx$ en faisant sur $f_1(x)$ et $f_2(x)$ les hypothèses déjà faites sur $f(x)$.

En effet nous aurons :

$$\int f_1(x)dx = F_1(x)$$

$$\int f_2(x)dx = F_2(x)$$

Posons $F_1(x) + \sqrt{-1}\,F_2(x) = F(x)$

d'où : $dF(x) = dF_1(x) + \sqrt{-1}\,dF_2(x) = f_1(x)dx + \sqrt{-1}\,f_2(x)dx = \left[f_1(x) + \sqrt{-1}\,f_2(x)\right]dx.$

Donc d'après la définition : $\int\left[f_1(x) + \sqrt{-1}\,f_2(x)\right]dx = F(x).$

Remarquons que l'intégrale d'une différentielle, peut n'être pas exprimable par un nombre limité des fonctions introduites jusqu'ici dans le calcul; telle est $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$; nous devons dès lors la considérer comme étant une <u>fonction</u> <u>nouvelle</u> exprimant l'aire d'une courbe.

Principe analogue au principe des fonctions de fonctions.

Si l'on a $\int f(x)dx = F(x)$ je dis qu'on aura également $\int f(u)du = F(u)$; u n'étant plus la variable indépendante.

On a en effet: $dF(x) = f(x)dx$

Donc, $dF(u) = f(u)du$

Par conséquent: $\int f'(u)du = F(u)$.

ou bien $\int f(u)\frac{du}{dx}dx = F(u)$

en mettant en évidence la variable indépendante.

Comme application de ce principe, je vais démontrer que connaissant

$\int f(x)dx = F(x)$, on peut en déduire $\int f(ax+b)dx$.

En effet, posons: $ax+b = u$ d'où $dx = \frac{du}{a}$

Nous aurons: $\int f(ax+b)dx = \int f(u).\frac{du}{a} = \int \frac{f(u)du}{a} = \frac{F(u)}{a}$

Donc $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a}$.

Voici une transformation, souvent employée pour arriver à l'intégrale d'une différentielle. Elle consiste à effectuer un changement de variable indépendante. Soit à trouver $\int f(u)dx$, que je représente par $F(x)$ ou par $x = \varphi(t)$, cette fonction étant telle qu'on sache trouver: $\int f(\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

$\psi(t)$ étant cette intégrale, en substituant à t sa valeur en x, on obtiendra $F(x)$.

En effet: $\int f(x)dx = F(x)$ donc:

$$\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = F[\varphi(t)].$$

Donc $\psi(t) = F[\varphi(t)]$

$\psi(t)$ étant ce que devient $F(x)$ lorsque j'y remplace x par $\varphi(t)$, lorsque je remplacerai t par sa valeur en x, je trouverai $F(x)$.

Règles d'Intégration.

Pour intégrer une somme de différentielles, on fait la somme des intégrations partielles.

Ainsi l'on a :

$$\int[f(x)dx+\varphi(x)dx-\psi(x)dx] = \int f(x)dx + \int \varphi(x)dx - \int \psi(x)dx.$$

Et en effet pour différentier le 2e membre, il suffit de différentier chacune des parties ce qui nous donne bien :
$f(x)dx+\varphi(x)dx-\psi(x)dx$.

On peut faire sortir du signe d'intégration toute quantité constante multipliant la différentielle.

Ainsi on aura : $\int A f(x)dx = A\int f(x)dx$

Si en effet nous différentions le 2e membre nous retrouverons, $Af(x)dx$ et le 2e membre ayant pour différentielle $Af(x)dx$, en est donc l'intégrale.

Ceci permettra, lorsque la différentielle sera affectée du signe − de la transporter devant l'intégrale ; puisque cela revient à le considérer comme étant donné par le facteur −1.

Pour intégrer une puissance $x^m dx$, on augmente l'exposant d'une unité, et on divise le résultat par le nouvel exposant.

Ce qui donne pour intégrale de $x^m dx$, $\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

En effet :

$$d(Ax^m) = m.A.x^{m-1}dx.$$

d'où : $\int mAx^{m-1}dx = Ax^m$.

Remplaçons dans cette égalité, m par $m+1$, nous aurons :

$$\int (m+1).A.x^m dx = Ax^{m+1}$$

En posant $(m+1)A = B$, d'où $A = \frac{B}{m+1}$, l'égalité devient :

$$\int B.x^m.dx = \frac{B.x^{m+1}}{m+1}$$

$$\text{ou} \quad B.\int.x^m dx = \frac{B.x^{m+1}}{m+1}$$

et en supprimant le facteur B

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$$

La démonstration ne peut s'appliquer dans le cas de $m=-1$, car $B=(m+1)A$ étant nul, sa suppression n'est plus permise, et l'égalité devient $0=0$.

Traitons à part ce cas particulier ; nous aurons :

$$\int x^{-1}.dx = \int \frac{dx}{x} = \log.x. \quad \text{car } d\log.x = \frac{dx}{x}.$$

On pourra de même vérifier facilement les égalités suivantes :

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log.a}$$

$$\int \sin.x\,dx = -\cos.x$$

$$\int \cos.x\,dx = \sin.x$$

On aura demême.

$$\int \sin. mx\,dx = -\frac{\cos. mx}{m} \text{ car } d\cos. mx = -m \sin. mx\,dx.$$

$$\int \cos. mx\,dx = \frac{\sin. mx}{m}.$$

Il résulte du principe que nous avons établi dès l'origine, que toutes ces règles subsisteront encore lors qu'on remplacera x par u, u étant une fonction de fonction.

Intégration d'une fraction rationnelle quelconque.

$f(x)$ et $F(x)$ étant deux polynomes entiers et rationnels, nous allons nous proposer de trouver $\int \frac{f(x)}{F(x)} dx$.

Or, on a vu qu'on pouvait decomposer une pareille fraction en fractions rationnelles plus simples et on a trouvé dans cette décomposition trois sortes de termes; les termes de la partie entière compris dans la formule Ax^m, des termes de la forme $\frac{A}{(x-\alpha)^m}$, enfin des termes de la forme $\frac{Ax+B}{\left[(x-\lambda)^2+\beta^2\right]^m}$

et comme l'intégration revient à intégrer séparément chacune des différentielles, nous pourrons considérer le problème comme résolu si nous parvenons à trouver

$$\int Ax^m dx, \quad \int \frac{A}{(x-\alpha)^m}, \quad \int \frac{Ax+B}{\left[(x-\lambda)^2+\beta^2\right]^m}$$

Or, $\int Ax^m dx = \frac{Ax^{m-1}}{m+1}$ d'après ce que nous avons démontré.

et nous n'avons pas à considérer le cas exceptionnel de $m=-1$, puisque l'ensemble des termes correspondants à Ax^m est un polynome entier.

$$\int\frac{A\,dx}{(x-\alpha)^m}=\int\frac{A\,d(x-\alpha)}{(x-\alpha)^m}=\int A.(x-\alpha)^{-m}d(x-\alpha)=\frac{A.(x-\alpha)^{-m+1}}{-m+1}=\frac{A}{(1-m)(x-\alpha)^{m-1}}$$

Pour le cas déjà considéré de $m=1$, ou $-m=-1$, nous savons que la formule n'est plus applicable; mais traitons le directement:

$$\int\frac{A\,dx}{x-\alpha}=A\int\frac{d(x-\alpha)}{x-\alpha}=A\log.(x-\alpha).$$

Si $x-\alpha$ était une quantité négative on prendrait $A\log.(\alpha-x)$; car il est à remarquer que $\log.(x)$ et $\log.(-x)$, ont la même différentielle $\frac{dx}{x}$; cela ne fait pas d'ailleurs exception à ce théorème: que deux fonctions ayant la même différentielle, ne diffèrent que par une constante, en effet $\log.(-x)=\log.(x\times-1)=\log.(x)+\log.(-1)$.

Arrivons à la partie difficile c'est-à-dire à l'intégration de $\frac{(Ax+B)\,dx}{[(x-\lambda)^2+\beta^2]^m}$. Je considérerai d'abord le cas de $m=1$.

Décomposons $\frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\lambda)^2+\beta^2}$ en deux parties dont l'une peut se mettre sous la forme $\frac{du}{u}$ dont l'intégrale est connue.

Pour cela j'introduis au numérateur la différentielle du dénominateur et je pose

$$Ax+B=\frac{A}{2}.\,2\,(x=\alpha)+A\alpha+B$$

J'aurai

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(a-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\int \frac{2(x-\alpha)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + (A\alpha+B)\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}.$$

or $\frac{A}{2}\int \frac{2(x-\alpha)\,du}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\log.\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]$

Je vais ramener la 2e intégrale à un arc tangent.

On sait que d arc $\log.\, x = \frac{dx}{1+x^2}$.

Or je remarque que $d.\text{ arc tang.} \frac{x-\alpha}{\beta} = \frac{d.\frac{x-\alpha}{\beta}}{1+\frac{(x-\alpha)^2}{\beta^2}} = \frac{\beta\, dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$

Donc $\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = d\left[\frac{1}{\beta}\text{ arc tang.} \frac{x-\alpha}{\beta}\right]$

Par conséquent. $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}\text{arc. tang.} \frac{x-\alpha}{\beta}$

nous aurons donc :

$$\int \frac{(Ax+B)\,dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{2}\log.\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right] + (A\alpha+B)\frac{1}{\beta}.\text{ arc tang.} \frac{x-\alpha}{\beta}$$

Il est facile de retrouver la formule

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2\beta^2} = \frac{1}{\beta}\text{ arc tang.} \frac{x-\alpha}{\beta}$. Il suffit de poser

$x-\alpha = \beta u$, $dx = \beta\, du$,

Donc : $\frac{dx}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{\beta\, du}{\beta^2 u^2+\beta^2} = \frac{1}{\beta}.\frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\beta}.\, d.\text{ arc tang.}\, u = d.\frac{1}{\beta}\text{arc. tang.} \frac{x-\alpha}{\beta}$

Pour traiter le cas général, où l'exposant est quelconque

es égal à m. Je vais faire voir comment on peut le déduire du cas où cet exposant est $m-1$; dès lors le problème sera résolu, puisqu'on pourra passer du cas de $m=1$, au cas de $m=2$; puis de $m=2$, au cas de $m=3$, et ainsi de suite.

Posons $x-\alpha=\beta u$, d'où $dx=\beta du$, nous aurons

$$\int\frac{(Ax+B)dx}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^m}=\int\frac{(A\beta u+A\alpha+B)\beta du}{(\beta^2u^2+\beta^2)^m}=\frac{A}{\beta^{2m-2}}\int\frac{udu}{(1+u^2)^m}+\frac{A\alpha+B}{\beta^{2m-1}}\int\frac{du}{(1+u^2)^m}$$

$$\text{Or}\int\frac{udu}{(1+u^2)^m}=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+u^2)}{(1+u^2)^m}=\frac{1}{2}\int(1+u^2)^{-m}.d(1+u^2)=\frac{1}{2}\cdot\frac{(1+u^2)^{-m+1}}{-m+1}.$$

Nous n'avons pas à nous occuper du cas exceptionnel où $m=1$, que nous avons déjà traité.

Pour avoir l'intégrale de $\frac{du}{(1+u^2)^m}$, je supposerai connue celle de $\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}$

$$\text{or } d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}}=d\left\{u(1+u^2)^{1-m}\right\}=(1+u^2)^{1-m}du+(1-m).u.(1+u^2)^{-m}\times 1\,u.du$$

$$\text{ou } d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}}=\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}+2(1-m)\frac{u^2du}{(1+u^2)^m}$$

$$\text{or. }\frac{u^2}{(1+u^2)^m}=\frac{1+u^2}{(1+u^2)^m}-\frac{1}{(1+u^2)^m}=\frac{1}{(1+u^2)^{m-1}}-\frac{1}{(1+u^2)^m}.$$

Nous aurons en substituant à $\frac{u^2}{1+u^2}$ sa valeur

$$d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}}=\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}+2(1-m)\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}-2(1-m)\frac{du}{(1+u^2)^m}$$

ou bien:

$$d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} = (3-2m).\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}} - 2(1-m).\frac{du}{(1+u^2)^m}.$$

Donc :

$$\int d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} = (3-2m)\int\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}} - 2(1-m)\int\frac{du}{(1+u^2)^m}.$$

or, $\int d.\frac{u}{(1+u^2)^{m-1}} = \frac{u}{(1+u^2)^{m-1}}$

Nous supposons connue $\int\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}$

Nous pourrons donc déduire de cette égalité $\int\frac{du}{(1+u^2)^m}$ en fonction de quantités connues et de $\int\frac{du}{(1+u^2)^{m-1}}$; nous pourrons donc connaître $\int\frac{du}{(1+u^2)^2}$, puisque nous connaissons $\int\frac{du}{1+u^2}$; on aura de même $\int\frac{du}{(1+u^2)^2}$ et ainsi de suite jusqu'à $\int\frac{du}{(1+u^2)^m}$.

On peut présenter sous un point de vue plus général l'opération qui nous a conduit à la valeur de $\int\frac{du}{(1+u^2)^m}$.

La méthode prend le nom d'intégration par parties ; elle repose sur l'égalité $d\,(u.v) = v\,du + u\,dv$

d'où l'on déduit : $\int v.du + \int u.dv = u.v$

et par conséquent : $\int v\,du = u.v - \int u.dv$

<u>on ramène par là une intégrale à une autre</u>. Ainsi ayant à trouver $\int f(x)dx$; on prépare $f(x)dx$, sous la forme $v\,du$, et dès lors on a : $\int f(x)dx = u.v - \int u\,dv$.

S'il arrive que $\int u.dv$ est égale à $\int f(x)dx$, ou n'en diffère que par une constante, nous pourrons déduire de cette équation, la valeur de $\int f(x)dx$. En voici un exemple :

Soit à trouver $\int x^m dx$: $x^m dx$ est immédiatement sous la forme $v\,du$, nous aurons donc :

$$\int x^m dx = x^m . x - \int x . d(x^m) = x^{m+1} - m \int x^m dx$$

d'où : $\int x^m dx = \dfrac{x^{m+1}}{m+1}$.

Appliquons maintenant cette méthode à la recherche de $\int \dfrac{du}{(1+u^2)^m}$ ou bien ce qui revient au même, de $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)^m}$, puisque nous savons de cette intégrale déduire la 1ère.
Nous aurons :

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \int \frac{(1+x^2-x^2)\,dx}{(1+x^2)^m} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^m} - \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^m}.$$

Nous supposons connue $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)^{m-1}}$.

Occupons nous donc de $\int \dfrac{x^2 . dx}{(1+x^2)^m}$, nous mettrons d'abord $\dfrac{x^2 dx}{(1+x^2)^m}$ sous la forme $v\,du$, or : $\dfrac{x^2 dx}{(1+x^2)^m} = x, \dfrac{x . dx}{(1+x^2)^m}$

$$\frac{x dx}{(1+x^2)^m} = \frac{1}{2}(1+x^2)^{-m} d(1+x^2) = d\left\{\frac{1}{2}\ \frac{(1+x^2)^{-m+1}}{-m+1}\right\}$$

Donc

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^m} = x . \frac{1}{2} . \frac{(1+x^2)^{-m+1}}{-m+1} - \int \frac{1}{2} . \frac{(1+x^2)^{-m+1}}{-m+1} dx$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^m} = x . \frac{1}{2} . \frac{(1+x^2)^{-m+1}}{-m+1} - \frac{1}{2(1-m)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}}$$

Donc

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^m} = \int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}} - \frac{x}{2(1-m)(1+x^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(1-m)} \int \frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}}.$$

ou : $\displaystyle\int\frac{dx}{(1+x^2)^m}=\frac{3-2m}{2(1-m)}\int\frac{dx}{(1+x^2)^{m-1}}-\frac{x}{2(1-m)(1+x^2)^{m-1}}$

Nous avons suivi la même marche, seulement nous l'avons rattachée au principe de l'intégration par parties.

Nous allons donner le moyen d'intégrer différentes fonctions en ramenant leur intégration à celle de fractions rationnelles :

Intégration d'expressions, ne renfermant que des irrationnelles monomes, c'est-à-dire relatives à la simple variable indépendante x.

Prenons un exemple :

Soit à intégrer : $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}-x}{1+\sqrt[5]{x}}\,dx$

nous aurons :

$$\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}-x}{1+\sqrt[5]{x}}\,dx=\frac{(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}}-x)\,dx}{1+x^{\frac{1}{5}}}.$$

Je réduis les exposants au même dénominateur 2, 3, 5, et je pose : $x^{\frac{1}{2.3.5}}=z$, d'où $x=z^{2.3.5}=z^{30}$

et $dx=30.\,z^{30-1}dz$

or $x^{\frac{1}{2}}=z^{15}$, $x^{\frac{1}{3}}=z^{10}$, $x^{\frac{1}{5}}=z^{6}$.

En substituant ces valeurs, la fonction devient rationnelle en z, et prend la forme $\dfrac{f(z)}{F(z)}dz$, $\dfrac{f(z)}{F(z)}$ étant une fraction rationnelle, nous pourrons donc en trouver l'intégrale, $F(z)$, en y remplaçant z par sa valeur en x, nous aurons, d'après ce que nous avons vu, l'intégrale cherchée.

L'intégration serait encore possible si tous les radicaux

portaient sur un même binôme $ax+b$. Car nous avons vu que connaissant l'intégrale de $f(x)dx$, on peut en déduire celle de $f(ax+b)dx$.

Autre cas d'intégration, relatif aux différentielles binômes.

Soit à trouver $\int x^m(a+bx^m)^k dx$

On aperçoit immédiatement deux cas où l'intégration est possible.

1°. Si k est un nombre entier positif ; on aura en effet en développant d'après le binôme un nombre limité de termes, qu'on intégrera séparément.

2°. Si $n=m-1$ ce qui donne $\int x^{m-1}(a+bx^m)^k$

alors :

$$\int x^{m-1}(a+bx^m)^k = \int \frac{(a+bx^m)^k \cdot d(a+bx^m)}{mb} = \frac{1}{mb}\,\frac{(a+bx^m)^{k+1}}{k+1};$$

et dans le cas exceptionnel de $k=-1$

$$\int x^{m-1}(a+bx^m)^{-1} = \int \frac{(a+bx^m)^{-1} \cdot d(a+bx^m)}{mb} = \int \frac{d(a+bx^m)}{mb\cdot(a+bx^m)} = \frac{1}{mb}\log.(a+bx^m).$$

Pour résoudre cette intégrale dans d'autres cas, je poserai :

$$a+bx^m = u$$

d'où : $mbx^{m-1}dx = du$, $x=\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1}{m}}$, $x^n=\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{n}{m}}$

$$dx = \frac{1}{mb}\cdot du.\, x^{1-m} = \frac{1}{mb}\cdot du\cdot\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1-m}{m}}$$

Nous aurons :

$$\int x^m(a+bx^m)^k dx = \int\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{n}{m}} u^k \frac{1}{mb}\,du\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{1-m}{m}} = \frac{1}{mb}\int u^k\left(\frac{u-a}{b}\right)^{\frac{n+1}{m}-1}\times du$$

Si $\frac{n+1}{m}-1$ est un nombre entier positif, l'intégration sera

possible.

Ainsi l'intégration sera possible, toutes les fois qu'il existera entre n et m, indépendamment de toute valeur attribuée à K, la relation : $\frac{n+1}{m} = \mu$, μ étant un nombre entier positif.

On voit que le cas de $n = m-1$, déjà traité, satisfait à la condition.

Pour arriver à l'intégration d'une autre classe de différentielles binômes, je mettrai x^m en facteur et j'aurai :

$$a + bx^m = x^m(b + ax^{-m})$$

$$(a+bx^m)^K = x^{mK}(b+ax^{-m})^K$$

$$\int x^n(a+bx^m)^K dx = \int x^{n+mK}(b+ax^{-m})^K dx,$$

et en appliquant à cette fonction, la règle trouvée précédemment, nous voyons que nous pourrons en avoir l'intégrale toutes les fois qu'entre n, m et K il y aura la relation :

$$\frac{n+mK+1}{-m} = \mu$$

μ étant nombre entier positif.

On pourra ramener à une fraction rationnelle, et par suite intégrer, $f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})dx$ toutes les fois que f sera une fraction rationnelle par elle-même, c'est-à-dire que $f(x,y)$ sera rationnelle en x et en y.

Afin d'éviter l'introduction d'imaginaires dans le calcul, je distinguerai trois cas et je donnerai trois méthodes correspondantes à chacun de ces cas. C'est dans le même but que dans les décompositions d'une fraction rationnelle, on a introduit des expressions

de la forme $\frac{Ax+B}{((x+\alpha)^2+\beta^2)^m}$.

1° cas de c positif.

Je pose $c=\alpha^2$, d'où $\alpha=\pm\sqrt{c}$

Le radical devient $\sqrt{a+bx+\alpha^2x^2}$, et je l'égale à $\alpha x+z$ j'aurai : $a+bx+a^2x^2=\alpha^2x^2+2\alpha xz+z^2$, en élevant au carré

d'où $x=\frac{z^2-a}{b-2\alpha z}$

dx sera donc rationnelle, et le radical disparaîtra, de sorte que la fonction deviendra rationnelle, et nous pourrons par conséquent l'intégrer :

Nous aurons :

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=z+\frac{\alpha z^2-a\alpha}{b-2\alpha z}=\frac{bz-2\alpha z^2+\alpha z^2-a\alpha}{b-2\alpha z}=\frac{bz-\alpha z^2-a\alpha}{b-2\alpha z}$$

$$dx=\frac{(b-2\alpha z).2zdz+(z^2-a)2\alpha dz}{(b-2\alpha z)^2}=\frac{2bz-2\alpha z^2-2a\alpha}{(b-2\alpha z)^2}$$

$$f(x,\sqrt{a+bx+cx^2})x=f\left(x,\frac{bz-\alpha z^2-a\alpha}{b-2\alpha z}\right)\frac{2bz-2\alpha z^2-2a\alpha}{(b-2\alpha z)^2}$$

Par la méthode précédente nous aurions $\alpha=\pm\sqrt{-c}$ et l'artifice réussirait encore ; mais pour éviter l'introduction d'imaginaires nous procéderons autrement, et nous distinguerons deux cas :

Le cas de a positif, le cas de a négatif.

Cas de a positif.

Soit $a=g^2$, $g=\pm\sqrt{a}$

Je pose : $\sqrt{a+bx+cx}=g+xz$

Élevons au carré :

$a+bx+cx^2=g^2+2x.zg+x^2.z^2$, divisons par x

$$b + cx = 2g.z + xz^2, \text{ d'où } \frac{b-2gz}{z^2-c}$$

Alors le radical et dx deviendront rationnels, par suite il en sera de même de la fonction ; nous aurons :

$$dx = \frac{(z^2-c)(-2g\,dz)-(b-2gz).2z.dz}{(z^2-c)^2} = \frac{2gc-2bz+2gz^2}{(c^2-c)^2}dz$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = g + \frac{bz-2gz^2}{z^2-c} = \frac{bz-gz^2-cg}{z^2-c}$$

$$f(x, \sqrt{a+bx+cx'})\,dx = f\left(x, \frac{bz-gz^2-cg}{z^2-c}\right) \times \frac{2gc-2bz+2gz^2}{(z^2-c)^2}\,dx$$

Il est à remarquer que cette méthode serait aussi applicable dans le cas de c positif.

Cas de a négatif.

Si a et c étant négatifs les racines sont imaginaires, les imaginaires étant déjà dans la fonction il est essentiel d'en éviter l'introduction ; et dès lors on pourra employer l'unquelconque des deux méthodes précédentes applicables à tous les cas lorsqu'on ne rejette pas l'introduction des imaginaires.

Nous supposerons donc que les racines sont réelles et nous pourrons écrire :

$$\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{c(x-h)(x-k)}$$

Je poserai :

$$\sqrt{c(x-h)(x-k)} = (x-h)z$$

en élevant au carré

$c(x-h)(x-k) = (x-h)^2 z^2$, supprimant le facteur $x-h$ ce que nous pourrons faire puisque dans le cas où x

serait égal à h, le radical se réduirait à zéro.

$$c(x-k)=(x-h)z^2,\quad cx-ck=xz^2-hz^2$$

d'où $x=\dfrac{hz^2-ck}{z^2-c}$

$$dx=\frac{(z^2-c)2.h.z.dz-(hz^2-ck)2.z.dz}{(z^2-c)^2}=\frac{-2hcz+2kcz}{(z-c)^2}dz=\frac{2cz(k-h)}{(z^2-c)^2}dz$$

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=z\left(\frac{hz^2-ck}{z^2-c}-h\right)=z\,\frac{c(h-k)}{z^2-c}$$

$$f(x\sqrt{a+bx+cx^2})\,a=f\left(x,z.\frac{c(h-k)}{z^2-c}\right)\frac{2cz(k-h)}{(z^2-c)^2}dz.$$

Les deux premières méthodes sont applicables dans tous les cas, lorsqu'on admet l'introduction des imaginaires, et remarquons qu'en les employant dans les cas où le résultat final doit être rationnel, les imaginaires se détruiront d'elles-mêmes, en ayant soin toutefois de remplacer les logarithmes imaginaires par les expressions qui en ont été données.

Application des méthodes précédentes.

Cherchons $\int\dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$, ou plus généralement $\int\dfrac{dx}{\sqrt{a+x^2}}$, que nous savons être égale à $\log.(x+\sqrt{a+x^2})$.

Voici d'abord un premier moyen d'y arriver :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\int\frac{(x+\sqrt{a+x^2})\,dx}{(\sqrt{a+x^2})(x+\sqrt{a+x^2})}=\int\frac{\frac{xdx}{\sqrt{a+x^2}}+dx}{x+\sqrt{a+x^2}}$$

$$=\int\frac{d\,(x+\sqrt{a+x^2})}{x+\sqrt{a+x^2}}=\log.\,(x+\sqrt{a+x^2})$$

Pour qu'en appliquant l'une des méthodes précédentes, précédentes, j'arrive à ce même résultat, voici comment j'opérerai :

Je poserai $\sqrt{a+x^2}=-x+z$

En élevant au carré : $a+x^2=x^2-2xz+z^2$

$$\text{d'où} \quad x=\frac{z^2-a}{2z}$$

$$\text{et} \quad dx=\frac{4z^2-2z^2+2a}{4z^2}dz=\frac{z^2+a}{2z^2}dz.$$

$$\sqrt{a+x^2}=-\frac{z^2-a}{2z}+z=\frac{z^2+a}{2z} \quad \text{Donc :}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\int\frac{z^2+a}{2z^2}dz\times\frac{2z}{z^2+a}=\int\frac{dz}{z}=\log.z=\log.(x+\sqrt{a+x^2})$$

Nous serions arrivés en opérant autrement, à une expression identique au fond, mais en différant par la forme et qu'on aurait pu y ramener.

Soit à intégrer $f(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{a'x+b'})dx$, en supposant que f est par elle même une fonction rationnelle.

Nous pourons écrire $f(x,\sqrt{ax+b},\sqrt{a'x+b'}$ sous la forme

$$\frac{L+L'\sqrt{ax+b}+L''\sqrt{a'x+b'}+L'''\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}}{M+M'\sqrt{ax+b}+M''\sqrt{a'x+b'}+M'''\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}}.$$

L, L', L'', L''' ; M, M', M'', M''' étant des polynomes entiers et rationnels.

Posons pour abréger : $\sqrt{ax+b}=\sqrt{R}$, $\sqrt{a'x+b'}=\sqrt{R'}$

Nous pourons mettre cette expression sous la forme :

$$\frac{P+P'\sqrt{R}}{Q+Q'\sqrt{R}} \text{ qui devient } \frac{(P+P'\sqrt{R})(Q-Q'\sqrt{R})}{Q^2-Q'^2R}$$

en multipliant les deux termes par $Q-Q'\sqrt{R}$ et le radical $\sqrt{R}$, n'entre plus au dénominateur; je mets maintenant la fraction sous la forme $\dfrac{N}{S+S'\sqrt{R'}}$

Elle devient en multipliant les deux termes par $S-S'\sqrt{R'}$

$$\frac{N(S-S'\sqrt{R'})}{S^2-S'^2R'}$$

Nous avons par là rendu le dénominateur rationnel; l'expression proposée pourra donc toujours être mise sous la forme :

$$\frac{L+L'\sqrt{ax+b}+L''\sqrt{a'x+b'}+L'''\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}}{M}$$

et nous aurons :

$$\int\frac{L+L'\sqrt{ax+b}+L''\sqrt{a'x+b'}+L'''\sqrt{ax+b}\sqrt{a'x+b'}}{M}dx=\int\frac{L\,dx}{M}+\int\frac{L'\sqrt{ax+b}}{M}dx$$

$$+\int\frac{L''\sqrt{a'x+b'}}{M}dx+\int\frac{L'''\sqrt{(ax+b)(a'x+b')}}{M}dx$$

Or, nous savons trouver chacune de ces intégrales; la 1ère. puisque $\dfrac{L}{M}$ est une fraction rationnelle; les deux suivantes, puis qu'elles correspondent au cas déjà traité, d'une fraction ne renfermant qu'un même radical binôme; enfin la dernière puisqu'elle est comprise dans la formule, $f(x, \sqrt{a+bx+cx^2})$, seulement ici la décomposition du trinôme en deux facteurs réels, est possible et effectuée; on pourra donc, employer la

troisième méthode.

Voici d'autres exemples d'intégration, où comme nous l'avons fait jusqu'ici, nous nous appuierons sur le principe de changement de variable indépendante, établi plus haut.

Cherchons $\int f(a^x)dx$.

Je pose $a^x = y$, $a^x \log.a.dx = dy$ $\quad dy = \frac{dy}{y \log.a}$

$$\int f(a^x)\,dx = \int f(y)\frac{dy}{y\log.a}$$

De sorte que toutes les fois que la transformée rentrera dans l'une des fonctions que nous avons traitées, on saura trouver l'intégrale de la proposée, par exemple si f est par elle-même une fonction rationnelle.

Soit encore à trouver : $\int f(\log.x)\frac{dx}{x}$.

Posons $\log.x = y \quad \frac{dx}{x} = dy$

$$\int f(\log.x)\frac{dx}{x} = \int f(y)\,dy.$$

Nous pourons effectuer cette transformation sur une multitude d'exemples, il suffit que la fonction soit suivie de la différentielle de la quantité mise en évidence dans cette fonction : Ainsi :

$\int f(\text{arc.tang}.x)\frac{dx}{1+x^2}$, posons, $\text{arc tang}.x = y$, $dy = \frac{dx}{1+x^2}$

$$\int f(\text{arc tang}.x)\frac{dx}{1+x^2} = \int f(y)\,dy. \qquad \text{etc.}$$

. . . .

Soit à trouver : $\int f(\sin.x, \cos.x)\,dx$,

Nous supposerons f rationnelle en elle-même, et nous allons arriver à une transformée que nous saurons intégrer.

Un premier moyen, le plus naturel, consiste à poser : $\sin.x = y$

d'où $\cos.x = \sqrt{1-y^2}$, $dx = \dfrac{dy}{\sqrt{1-x^2}}$

et l'expression devient : $\int f(y, \sqrt{1-y^2})\dfrac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$; que nous savons intégrer. Mais en employant ce procédé, nous devons faire une deuxième transformation pour éliminer le radical carré ; afin d'éviter cette double transformation voici comment nous opérerons :

Posons : $\tang.\frac{1}{2}x = z \quad x = 2\,\text{arc tang}.\,z$

$$dx = \frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\sin.\frac{1}{2}x = \frac{z}{\sqrt{1+z^2}} \quad \cos.\frac{1}{2}x = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

$$\sin.x = 2\sin.\frac{1}{2}x\cos.\frac{1}{2}x = \frac{2z}{1+z^2}$$

$$\cos.x = \cos^2\frac{1}{2}x - \sin^2\frac{1}{2} = \frac{1-z^2}{1+z^2}.$$

Donc :

$$\int f(\sin.x, \cos.x)\,dx = \int f\left(\frac{2z}{1+z^2}, \frac{1-z^2}{1+z^2}\right)\frac{2dz}{1+z^2}.$$

Dans la fonction f, le sinus ou le cosinus peuvent manquer séparément. Si par exemple nous considérons $\int\dfrac{dx}{\sin.x}$, nous aurons en nous servant des résultats

précédents :

$$\int \frac{dx}{\sin.x} = \int \frac{2dz}{1+z^2} \cdot \frac{1+z^2}{2z} = \int \frac{dz}{z} = \log.(z) = \log.(\text{tang}.\tfrac{1}{2}x).$$

Nous pourrions trouver de même $\int \frac{dx}{\cos.x}$, mais nous pouvons la déduire de l'expression que nous venons de trouver ; il suffit de remarquer que $\cos.x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$; nous aurons :

$$\int \frac{dx}{\cos.x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int \frac{d\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = -\int d\log.\text{tang}.\tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right)$$

ou $\int \frac{dx}{\cos.x} = -\log.\ \text{cotang}.\ \frac{1}{2}x.$

Nous aurons aussi, en appliquant la première de ces deux formules :

$$\int \frac{dx}{\sin.x\cos.x} = \int \frac{2dx}{\sin.2x} = \int \frac{d(2x)}{\sin.(2x)} = \log.\ \text{tang}.\ (x)$$

Nous aurions pu faire l'inverse, partir de cette intégrale pour arriver à la première, de la manière suivante :

$$\int \frac{d(2x)}{\sin 2x} = \int \frac{dx}{\sin.x\cos.x} = \int \frac{\cos.x}{\sin.x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\,\text{tang}.x}{\text{tang}.x} = \log.\text{tang}.x,$$

et en remplaçant $2x$ par x

$$\int \frac{dx}{\sin.x} = \log.\ \text{tang}.\ \frac{1}{2}x$$

Appliquons le principe d'intégration par parties à la recherche de $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}}$, où nous supposerons m entier.

Le procédé que nous allons employer est le procédé d'intégration par réduction, il consiste à abaisser le degré m de l'exposant.

Nous aurons :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+x}} . \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}} = \int x^{m-1} \cdot \frac{x\,dx}{\sqrt{a+x^2}} = \int x^{m-1}\, d\sqrt{a+x^2}$$

Donc

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+x}} = x^{m-1}\sqrt{a+x^2} - \int d(x^{m-1})\sqrt{a+x^2}$$

$$= x^{m-1}\sqrt{a+x^2} - (m-1)\int \sqrt{a+x^2}\, x^{m-2} \cdot dx.$$

$$\text{or } \int \sqrt{a+x^2}\, x^{m-2} dx = a\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+x^2}} + \int \frac{x^m \cdot dx}{\sqrt{a+x^2}}$$

en multipliant et divisant à la fois l'expression par $\sqrt{a+x^2}$

$$\text{Donc : } \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}} = x^{m-1}\sqrt{a+x^2} - (m-1)a\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+x^2}} - (m-1)\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}}$$

$$\text{ou } m\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}} = x^{m-1}\sqrt{a+x^2} - (m-1)\,a\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+x^2}}$$

$$\text{d'où } \int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+x^2}} = \frac{\sqrt{a+x^2}}{m}x^{m-1} - \frac{(m-1)a}{m}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+x^2}}$$

Nous faisons donc dépendre l'intégrale cherchée, d'une quantité connue et d'une autre intégrale analogue, où l'exposant m est diminué de deux unités. Par conséquent le problème peut être considéré comme résolu, si nous trouvons l'intégrale pour le cas de l'exposant $= 0$, où l'on sera ramené si m est pair, et pour le cas de cet exposant $= 1$, où l'on sera ramené si m est impair.

Supposons maintenant l'exposant négatif, et remplaçons dans la formule précédente m par $m-1$, elle deviendra :

$$-m\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+x^2}}=\frac{\sqrt{a+x^2}}{x^{m+1}}+(m+1)a\int\frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{a+x^2}}$$

D'où l'on déduit :

$$\int\frac{dx}{x^{m+2}\sqrt{a+x^2}}=-\frac{\sqrt{a+x^2}}{(m+1)ax^{m+1}}-\frac{m}{(m+1)a}\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+x^2}}.$$

Et en y remplaçant m par $m-2$, nous aurons la formule :

$$\int\frac{dx}{x^m\sqrt{a+x^2}}=-\frac{\sqrt{a+x^2}}{(m-1)ax^{m-1}}-\frac{m-2}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-2}\sqrt{a+x^2}}$$

On voit donc que si m est pair le problème sera ramené au cas où l'exposant est zéro, si m est impair, au cas où cet exposant est -1.

Ainsi pour que le problème soit résolu, m étant un nombre entier positif ou négatif, il suffira de connaître :

$$\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+x^2}},\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}},\ \int\frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}}$$

or $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{a+x^2}}=\sqrt{a+x^2},\ \int\frac{dx}{\sqrt{a+x^2}}=\log.(x+\sqrt{a+x^2})$

Pour trouver $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}}$ posons $x=\frac{1}{y}$, $dx=-\frac{dy}{y^2}$

on aura :

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}}=-\int\frac{dy}{\sqrt{ay^2+1}}.$$

Distinguons le cas de a positif, et de a négatif ; dans le

premier, posons $a = \frac{1}{b^2}$, alors :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ay^2+1}} = \int \frac{b\,dy}{\sqrt{b^2+y}} = b \log.\left(y + \sqrt{y^2+b^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}} = -b \log.\left(y + \sqrt{b^2+y^2}\right)$$

Si a est négatif, posons $a = -\frac{1}{b^2}$, nous aurons :

$$\int \frac{dy}{\sqrt{ay^2+1}} = \int \frac{b\,dy}{\sqrt{b^2-y^2}} = b \int \frac{d\left(\frac{y}{b}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y^2}{b^2}\right)}} = b \text{ arc sin } \frac{y}{b}$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}} = -b \text{ arc sin } \frac{y}{b} = -b \text{ arc sin } \frac{1}{bx}.$$

Nous arriverons au même résultat, en faisant,

$a = -\frac{1}{b^2}$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}}$, nous aurons :

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+x^2}} = \int \frac{b\,dx}{x\sqrt{b^2x^2-1}} = b \int \frac{d(bx)}{bx\sqrt{(bx)^2-1}}$$

$$= b \int d \text{ arc sec } bx = b \int d \text{ arc cos. } \frac{1}{b} = b \int -d \text{ arc sin } \frac{b}{bx} = -b \text{ arc sin } \frac{1}{bx}$$

On pourrait d'ailleurs ramener le cas de m négatif, au cas de m positif, en posant $x = \frac{1}{y}$, d'où $dx = \frac{-dy}{y^2}$.

Il vient alors :

$$\int \frac{dx}{x^m\sqrt{a+x^2}} = \int \frac{-dy}{y^2} \cdot \frac{y^m}{\sqrt{a+\frac{1}{y^2}}} = -\int \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{ay^2+1}}$$

Appliquons le procédé d'intégration par réduction,

à la recherche de $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$, m étant un nombre entier.

Cas de m positif.

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int x^{m-1} \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{or} \int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x^{m-1} x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2} + (m-1)\int x^{m-2} dx \sqrt{a^2-x^2}$$

et multipliant et divisant par $\sqrt{a^2-x^2}$ la 2^e expression :

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2} + (m-1)a^2 \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2-x^2}} - (m-1)\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{a^2-x^2}}{m} + \frac{(m-1)a^2}{m}\int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

En y remplaçant, m par $2-m$, on aura la formule convenant au cas de m négatif ; et on verra comme précédemment qu'il suffit de résoudre le problème pour les cas de $m=1$, $m=0$, $m=-1$.

Or, $\int \frac{x dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{arc sin.} \frac{x}{a}$

Pour trouver $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}$ je pose $x = \frac{1}{y}$, $dx = -\frac{dy}{y^2}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\int \frac{dy}{y^2} \cdot y \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-\frac{1}{y^2}}} = -\int \frac{dy}{\sqrt{a^2y^2-1}} = -\frac{1}{a}\int \frac{d\,(ay)}{\sqrt{(ay)^2-1}}.$$

Donc : $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\log.\left(ay + \sqrt{(ay)^2-1}\right)$

Soit à trouver $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

Cette intégrale rentre dans un cas plus général que nous avons traité, mais nous allons en donner une solution d'une application plus facile.

Introduisons au numérateur la différentielle du trinome du 2e degré, et pour cela remarquons que :
$x=\frac{1}{2c}(b+2cx)-\frac{b}{2c}$. nous aurons :

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\int x^{m-1}\frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

et substituant dans $x\,dx$ à x sa valeur :

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+2x^2}}=-\frac{b}{2c}\int x^{m-1}\frac{dx.}{\sqrt{a+bx+cx^2}}+\frac{1}{c}\int x^{m-1}.\frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

$$\int x^{m-1}\frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}}=x^{m-1}.\sqrt{a+bx+cx^2}-(m-1)\int x^{m-2}.dx.\sqrt{a+bx+cx^2}$$

or. $$\int x^{m-2}.dx\sqrt{a+bx+cx^2}=a\int\frac{x^{m-2}.dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}+b\int\frac{x^{m-1}.dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}+c\int\frac{x^m.dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

en multipliant et divisant par le radical.

Nous aurons donc en substituant :

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=-\frac{b}{2c}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}+\frac{1}{c}x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}-\frac{(m-1)a}{c}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$-\frac{(m-1)b}{c}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$
$$(m-1)\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

$$m.\int\frac{x^m dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{c}x^{m-1}\sqrt{a+bx+cx^2}+\frac{(1-2m)b}{2c}\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}-\frac{(m-1)a}{c}\int\frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

Nous faisons par là dépendre l'intégrale cherchée, de deux autres, dont l'une à l'exposant $m-1$, et l'autre $m-2$.

Comme précédemment on passera au cas où m est négatif, et l'on verra de même, qu'il suffit de résoudre l'intégrale dans les trois cas de $m=1$, $m=0$, $m=-1$.

Cas de $m=0$, nous cherchons $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

On peut écrire :

$$a+bx+cx^2=c\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2+a-\frac{b^2}{4c}$$

Nous distinguerons deux cas selon que c sera positif ou négatif.

Cas de c positif : soit $c=\alpha^2$.

$$a+bx+cx^2=\left(\alpha x+\frac{\alpha b}{2c}\right)^2+\frac{b^2}{4c}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\alpha}\int\frac{d\left(\alpha x+\frac{\alpha b}{2c}\right)}{\sqrt{\left(\alpha x+\frac{\alpha b}{2c}\right)^2+a-\frac{b^2}{4c}}}=\frac{1}{\alpha}\log.\left(\alpha x+\frac{\alpha b}{2c}+\sqrt{a+bx+cx^2}\right)$$

Posons $\alpha x+\frac{\alpha b}{2c}=u$, $a-\frac{b^2}{4c}=A$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\alpha}\int\frac{du}{\sqrt{u^2+A}}=\frac{1}{\alpha}\log.\left(u+\sqrt{u^2+A}\right)$$

Cas de c négatif

Posons $c=-\alpha^2$, alors $a-\frac{b^2}{4c}$ est positif, j'égalerai cette expression à $\alpha^2\beta^2$ et j'aurai :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{-\alpha^2\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2+\alpha^2\beta^2}}=\frac{1}{\alpha}\int\frac{d\left(x+\frac{b}{2c}\right)}{\sqrt{\beta^2-\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2}}$$

et en posant $x+\frac{b}{2c}=u$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\alpha}\int\frac{du}{\sqrt{\beta^2-u^2}}=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arc.\,sin.}\frac{u}{\beta}=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{arc\,sin.}\frac{x+\frac{b}{2c}}{\beta}$$

Cas de $m=1$.

Il s'agit de trouver $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$

En remarquant encore que $x = \frac{1}{2c}(b+cx) - \frac{b}{2c}$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{c}\int \frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$$

Or, nous venons de trouver la 2e intégrale, et on a d'ailleurs :

$$\int \frac{d(a+bx+cx^2)}{2\sqrt{a+bx+cx^2}} = \sqrt{a+bx+cx^2}$$

Intégration de $x^m \log. x\,dx$, m étant quelconque

$$\int x^m \log. x . dx = \int \log. x . x^m . dx = \int \log. x . d\left(\frac{x^{m+1}}{m+1}\right)$$

$$\int x^m \log. x\,dx = \log. x \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} . \frac{dx}{x} = \log. x . \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int x^m dx$$

$$\int x^m \log. x\,dx = \log. x . \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\log. x - \frac{1}{m+1}\right).$$

Traitons à part le cas de $m=-1$, auquel la formule ne peut pas s'appliquer

$$\int \frac{\log. x\,dx}{x} = \int \log. d \log. x = \frac{(\log. x)^2}{2}$$

Appliquons la même méthode à $\int x^m (\log. x)^n dx$

$$\int x^m (\log. x)^m dx = \int (\log. x)^n x^m dx = (\log. x)^n \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} n (\log x)^{n-1} . \frac{dx}{x}$$

et nous voyons dans la 2e intégrale que l'exposant de $\log. x$ a été diminué d'une unité; on pourra donc le diminuer jusqu'à ce qu'on arrive à une expression de forme $x^m dx$, dont l'intégrale est $\frac{x^{m+1}}{m+1}$.

Ceci suppose n entier et positif, mais m quelconque,

Seulement la formule n'est pas applicable pour le cas de $m=-1$.

On a alors: $\int \frac{(\log.x)^n dx}{x} = \int (\log.x)^n d\log.x = \frac{(\log.x)^{n+1}}{n+1}$

Si l'on suppose n négatif, la 1ère formule, en y remplaçant n par $-n$, nous donne

$$\int \frac{x^{m+1}}{m+1} \times -n . \frac{dx}{(\log.x)^{n+1} x} \text{ en fonction de } \int \frac{x^m}{(\log.x)^n} dx.$$

On pourra donc par des réductions successives trouver cette intégrale, si en même temps qu'on fait $m=-1$, on fait $n=-1$, la formule précédente n'est plus applicable, on a alors:

$$\int \frac{dx}{x \log.x} = \int \frac{d\log.x}{\log.x} = \log.(\log.x).$$

Soit à trouver $\int x^m \text{arc.tang}.x\, dx$.

$$\int x^m \text{arc.tg}.x\, dx = \int \text{arc.tg}.x . x^m dx = \text{arc.tg}.x \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} d(\text{arc.tg}.x)$$

$$\int x^m \text{arc.tg}.x\, dx = \text{arc.tg}.x \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1} \int \frac{x^{m+1} dx}{1+x^2}.$$

Si m est entier positif ou négatif, nous sommes ramenés à l'intégration d'une fonction rationnelle, et si m est fractionnaire à celle d'une fraction ne renfermant que des radicaux portant sur la même lettre x.

De même

$$\int f(x)\, \text{arc.tg}.x\, dx = \int \text{arc.tg}.x f(x) dx = \text{arc.tg}.f_1(x) - \int \frac{f_1(x) dx}{1+x^2}$$

En posant $\int f(x) dx = f_1(x)$

De sorte qu'on saura trouver cette intégrale si $f_1(x) dx$ rentre dans les fonctions que nous avons traitées.

On peut remplacer arc tang. x par arc. sin x ou arc cos. x, dont les différentielles sont algébriques. Ainsi :

$$\int x^m \text{arc sin.} x\,dx = \int \text{arc. sin.} x \cdot x^m dx = \text{arc. sin.}\, x \frac{x^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1} \cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

et nous savons trouver $\int \frac{x^{m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}$, dans le cas de m entier.

Dans le cas de $m=0$

$$\int \text{arc tang.} x\,dx = \text{arc. tg.} x . x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} = x . \text{arc. tg.} x - \frac{1}{2} \log.(1+x^2)$$

$$\int \text{arc. sin.} x\,dx = \text{arc sin } x - \int \frac{x.dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arc sin } x . x + \sqrt{1-x^2}$$

Nous pourons généraliser encore :

$$\int x^m \text{arc. tg.} \varphi(x) dx = \int \text{arc tg.} \varphi(x) . x^m dx = \text{arc. tg.} \varphi(x) . \frac{x^{m+1}}{m+1} - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \frac{\varphi'(x) dx}{1+\varphi(x^2)}$$

L'intégrale pourra donc être trouvée, si m étant entier $\varphi(x)$ est rationnel, ou ne renferme qu'un même radical du 2.e degré ; si m étant fractionnaire $\varphi(x)$ ne renferme que des irrationnelles monomes etc.

Enfin soit encore $\int f(x)$ arc. tg. $\varphi(x)\,dx$

$$\int f(x) \text{arc. tg.} \varphi(x) dx = \int \text{arc. tg.} \varphi(x) d f_1(x) = \text{arc. tg.} \varphi(x) f_1(x) - \int \frac{f_1(x)\varphi'(x) dx}{1+\varphi(x)^2}$$

En désignant $\int f(x) dx = f_1(x)$

et on est ramené à trouver une intégrale débarassée de la transcendante, arc tang. $\varphi(x)$

Soit à intégrer $a^x x^m dx$

$$\int a^x . x^m . dx = \int x^m a^x dx = x^m \frac{a^x}{\log. a} - \int \frac{a^x}{\log. a} m . x^{m-1} dx$$

et nous voyons dans l'intégrale du 2.e membre, l'exposant de x est diminué d'une unité ; on arrivera donc

par des réductions successives au cas de $m=0$.

Or, $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\log . a}$

Prenons l'expression plus générale $\int a^{\alpha x+\beta} . x^m dx$

$$\int x^m . a^{\alpha x+\beta} . dx = x^m \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha \log . a} - \int m . x^{m-1} . \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha \log . a} dx ,$$

Le degré m est par là abaissé d'une unité, il suffit donc de résoudre l'intégrale dans le cas où cet exposant est nul.

$$\text{Or, } \int a^{\alpha x+\beta} dx = \frac{a^{\alpha x+\beta}}{\alpha \log . a} .$$

Si nous voulons supposer l'exposant négatif, remplaçons m par $-m$, dans la formule précédente et nous aurons :

$$\int \frac{a^{\alpha x+\beta}}{x^{m+1}} dx = + \frac{\alpha \log . a}{m} \int \frac{a^{\alpha x+\beta} dx}{x^m} - \frac{a^{\alpha x+\beta}}{m x^m} .$$

On voit bien qu'on pourra abaisser le degré jusqu'au cas de $m=1$, mais qu'on ne pourra pas passer du cas $m=0$:

On démontre que $\int \dfrac{a^{\alpha x+\beta}}{x} dx$, ou encore $\int \dfrac{a^x}{x} . dx$,

ne peut s'exprimer par un nombre limité des signes introduits jusqu'ici dans le calcul.

Mais il est cependant important de pouvoir réduire à ces intégrales simples, d'autres intégrales où l'exposant de x est plus élevé.

On peut ramener à cette même intégrale irréductible, $\int \log . (\log . x) dx$.

En effet : $\int \log.(\log.x)\,dx = \log.(\log.x)\,x - \int x.\frac{d\log.x}{\log.x}$

Or en posant $\log.x = y$ $x = e^y$, $dx = e^y dy$

$$\int x.\frac{d\log.x}{\log.x} = \int \frac{e^y.dy}{y}.$$

Dans l'expression $\int \alpha^{\alpha x+\beta}.x^m dx$, $\alpha x+\beta$, peut être imaginaire, ce qui permet de résoudre l'intégrale dans le cas où l'exponentielle est remplacée par un sinus ou un cosinus, car $\sin.x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$.

Nous pourrons donc arriver de même à trouver

$$\int \alpha^{\alpha x+\beta} \begin{matrix}\sin\\ \text{ou}\\ \cos.\end{matrix}\Big\{(p+q)\,dx.\,x^m.$$

en remplaçant $\begin{matrix}\sin\\ \text{ou}\\ \cos.\end{matrix}\Big\{p\,x+q\Big\}$ par sa valeur.

Nous allons arriver à résoudre cette même intégrale, directement.

Cherchons : $\int \sin.(px+q)\,x^m dx$ qui est un cas particulier.

$$\int \sin.(px+q)\,x^m dx = \int x^m \sin(px+q)\,dx = -x^m\frac{\cos(px+q)}{p} + \frac{m}{p}\int \cos(px+q)\,x^{m-1}.dx.$$

$$\int x^{m-1}\cos.(px+q)\,dx = x^{m-1}.\frac{\sin.(px+q)}{p} - \frac{m-1}{p}\sin(px+q)\,x^{m-1}dx.$$

En substituant la valeur de cette intégrale, nous serons ramenés à une intégrale où l'exposant sera diminué de deux unités. Il suffit donc de connaître, dans le cas de $m=0$, et de $m=1$.

Or. $\int \sin(px+q)\,dx = -\frac{\cos.(px+q)}{p}$

et $\int x \sin.(px+q)dx = -x.\frac{\cos.(px+q)}{p} + \int \frac{\cos px+q}{p}dx$

$\int \frac{\cos. px+q}{p}dx = \frac{1}{p^2}\sin.(px+q)dx$

Autre cas particulier :

$$\int a^{\alpha x+\beta}.\sin.(px+q)dx = -a^{\alpha x+\beta}.\frac{\cos.(px+q)}{p} + \frac{\alpha \log. a}{p}\int a^{\alpha x+\beta}.\cos(px+q)dx$$

$$\int a^{\alpha x+\beta}.\cos.(px+q)dx = a^{\alpha x+\beta}.\frac{\sin.(px+q)}{p} - \frac{\alpha \log. a}{p}\int a^{\alpha x+\beta}\sin(px+q)dx$$

Nous pourrons déduire de ces deux équations, par l'élimination :

$\int a^{\alpha x+\beta}.\sin(px+q)dx$, et $\int a^{\alpha x+\beta}\cos.(px+q)dx$

Nous arrivons au cas général :

$$\int a^{\alpha x+\beta}\sin.(px+q)x^m dx.$$

Il vaut mieux pour ce cas, recourir à la méthode que nous avons indiquée ; cette formule renferme encore le cas où le sinus ou cosinus serait remplacé par un produit de la forme :

$$\sin(px+q)\cos.(p'x+q')\sin(p''x+q'')\ldots\ldots$$

ou bien par une puissance telle que $\sin.^m(px+q)$, ou $\cos.^m(px+q)$

car de pareils produits donnent lieu à une somme de sinus ou cosinus où x entre au premier degré.

Ce qu'on voit facilement d'après les formules

$$\cos.a\ \cos.b = \frac{1}{2}\cos.(a+b) + \frac{1}{2}\cos.(a-b)\ \ldots\ldots \text{etc.}$$

Passons à l'intégration de $\sin^m x dx$, $\cos.^n x dx$, $\sin^m x \cos.^n x dx$; Nous allons traiter ce cas directement sans recourir au procédé que nous venons d'indiquer, et cela servira

à résoudre le cas où au lieu de $\sin. x$, on aurait $\sin. (ax+b)$, d'après un théorème établi dès le commencement.

$$\int \sin^m x dx = -\sin.^{m-1} x . \cos. x + (m-1) \int \sin.^{m-2} x \cos^2 x dx$$

et en remplaçant $\cos^2 x$ par $1-\sin.^2 x$

$$\int \sin^m x dx = -\sin.^{m-1} x \cos. x + (m-1). \int \sin.^{m-2} x dx' x - (m-1) \int \sin.^m x dx$$

$$\int \sin.^m x dx = -\frac{\sin.^{m-1} x \cos. x}{m} + \frac{(m-1)}{m} \int \sin.^{m-2} x dx$$

Nous sommes ramenés à une intégrale, où l'exposant est diminué de deux unités. Il suffit donc de résoudre l'intégrale dans le cas de $m=0$, ou de $m=1$.

Or, $\int dx = x$, $\int \sin. x dx = -\cos. x$.

Si l'on veut supposer l'exposant négatif, il suffit de remplacer dans la formule précédente, m par $2-m$, elle devient :

$$\int \frac{dx}{\sin.^{m-2} x} = -\frac{\cos. x}{(2-m) \sin.^{m-1} x} + \left(\frac{1-m}{2-m}\right) \int \frac{dx}{\sin.^m x}$$

$$\int \frac{dx}{\sin.^m x} = \frac{2-m}{1-m} \int \frac{dx}{\sin^{m-2} x} + \frac{\cos. x}{(1-m). \sin^{m-1} x}.$$

Cette nouvelle formule, nous montre qu'il suffit de résoudre le problème dans le cas de $m=0$, et de $m=1$.

$$\int dx = x, \int \frac{dx}{\sin. x} = \log. \tang \frac{1}{2} x.$$

On arriverait à des formules analogues, si le sinus était remplacé par le cosinus.

Traitons un cas plus général.

$$\int \sin^m x \cos^n dx = \int \sin^{m-1} x . \cos^n x \sin x\, dx = -\sin^{m-1} x \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x . \cos^{n+2} x\, dx$$

L'exposant du sinus est diminué de deux unités, et celui du cosinus augmenté, de sorte que m étant pair, on pourra ramener l'intégration à l'un des cas précédents, si n est négatif, l'exposant du cosinus est diminué d'une unité, de sorte que quelque soit d'ailleurs le signe de m, on sera par des réductions successives ramené au cas précédent ; nous supposerons donc n positif et d'abord m également positif.

La formule devient en y remplaçant,

$\cos^{n+2} x$ par $\cos^n x \,(1-\sin^2 x)$

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\sin^{m-1} x \frac{\cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx - \frac{m-1}{n+1} \int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

ou bien en supprimant le dénominateur commun $n+1$

$$(m+n) \int \sin^m x \cos^n x\, dx = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m-1), \int \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx.$$

Nous voyons que cette formule nous donne un résultat fini pour le cas de $n=-1$, ce qui n'avait pas lieu dans la précédente ; et ce résultat est admissible, puisque le deuxième membre, est égal au premier pour une infinité de valeurs de n et de m.

Par cette formule, l'exposant du sinus est diminué de deux unités et celui du cosinus resté le même ; il suffit de connaître : $\int \cos^n x\, dx$, que nous savons trouver.

$$\text{et } \int \cos^n x \sin x . dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1}.$$

Pour le cas de m négatif, il suffit de déduire dans la formule précédente l'intégrale du deuxième membre de

celle du premier, et de connaître $\int \cos^n x dx$ que nous savons trouver et $\int \frac{\cos.^n x dx}{\sin. x}$.

$$\text{Or, } \int \frac{\cos.^n x dx}{\sin x} = \int \frac{\cos.^{n-2} x (1-\sin.^2 x)}{\sin. x} dx = \int \frac{\cos.^{n-2} x}{\sin. x} dx - \int \cos.^{n-2} x \sin. x dx$$

$$= \int \frac{\cos.^{n-2} x}{\sin. x} dx + \frac{\cos.^{n-1} x}{n-1}.$$

On fera donc dépendre cette intégrale de $\int \frac{dx}{\sin. x} = \log. tg. \frac{1}{2}$: de $\int \frac{\cos. x dx}{\sin x} = \log. \sin. x$.

On pourrait d'ailleurs arriver à cette intégrale en opérant sur le sinus comme nous avons opéré sur le cosinus dans le cas où l'exposant de cosinus est négatif, et on continuerait la méthode en s'attachant à faire décroître l'exposant du cosinus, laissant celui du sinus constant; les calculs étant analogues à ceux que nous avons faits nous ne les reproduirons pas.

Considérons dans la formule générale que nous avons trouvée le cas particulier de $n = -m$, où elle n'est plus propre à donner l'intégrale cherchée.

Elle nous donne alors la relation :

$$\int \frac{\sin.^{m-2} x}{\cos.^m x} dx = \frac{\sin.^{m-1} x}{\cos.^{m-1}} \cdot \frac{1}{m-1} = \frac{1}{m-1} \cdot \text{tang}.^{m-1} x.$$

Résultat facile à trouver directement, car :

$$\int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^m x} dx = \int \left(\frac{\sin. x}{\cos. x}\right)^{m-1} \cdot \frac{dx}{\cos.^2 x} = \int \text{tang}.^{m-2} x . d\, \text{tang}. x = \frac{1}{m-1} . \text{tang}.^{m-1} x$$

nous aurons, en considérant l'expression analogue :

$$\int \frac{\cos.^{m-2} x}{\sin.^{m} x}\, dx = -\int \text{cotang}^{m-2} x \; d\,\text{cotang}.\, x = -\frac{\text{cotang}.^{m+1} x}{m-1}$$

Dans le cas particulier de $m=1$, la 1ère expression donne :

$$\int \frac{dx}{\sin.x \cos.x} = \int \frac{d\,\text{tang}.(x)}{\text{tang}.(x)} = \log.(\text{tang}.\,x)$$

et la 2ème: $$\int \frac{dx}{\sin.x \cos.x} = -\int \frac{d\,\text{cotang}.(x)}{\text{cotang}.\,x} = -\log.(\text{cotang}.\,x).$$

Traitons directement le cas de $n=-m$

$$\int \frac{\sin^{m} x}{\cos^{m} x}\, dx = \int \frac{\sin.^{m-2} x}{\cos.^{m} x}\, dx - \int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{m-2} x}\, dx = \frac{1}{m-1}\,\text{tang}.^{m-1} x - \int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos.^{m-2} x}\, dx$$

L'exposant m est réduit par là de deux unités, il suffit donc de trouver la valeur de l'intégrale, pour le cas de $m=0$, et pour le cas de $m=1$.

Or, $\int dx = x$, $\int \frac{\sin.x}{\cos.x}\, dx = -\int \frac{d\cos x}{\cos.x} = -\log(\cos.x)$

Si au contraire nous supposions $m=-n$, n étant positif, nous aurions :

$$\int \frac{\cos.^{m} x}{\sin.^{m} x}\, dx = +\int \frac{\cos^{m-2} x\, dx}{\sin.^{m} x} - \int \frac{\cos.^{m-2} x}{\sin.^{m-2} x}\, dx = -\frac{\text{cotg}.^{m+1} x}{m-1} - \int \frac{\cos^{m-2} x}{\sin.^{m-2} x}\, dx$$

L'exposant est réduit de deux unités, et le problème peut encore être considéré comme résolu, puisqu'on connaît :

$$\int dx = x, \quad \int \frac{\cos.x\, dx}{\sin.x} = \log.(\sin.x).$$

Intégrales définies.

$F(x)$ ayant pour différentielle $f(x)dx$, nous avons l'égalité $\int f(x)dx = F(x)+C$.

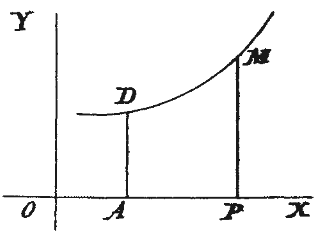
C étant une constante, que nous avons négligée dans les intégrations précédentes. Déterminons cette

constante par la condition d'annuler l'intégrale pour la valeur de $x=a$; ce qui donne $F(a)+C=0$, ou $C=-F(a)$

L'intégrale $F(x)-F(a)$, sera particularisée, mais restera indéterminée, puisqu'elle varie avec les diverses valeurs attribuées à x; elle s'écrira $\int_a^x f(x)\,dx$, ce qui se prononce intégrale depuis a jusqu'à x de $f(x)\,dx$, et $\int_a^x f(x)\,dx + C$ sera l'intégrale générale.

Si maintenant nous donnons à x la valeur particulière b, nous aurons $\int_a^b f(x)\,dx$, qui se prononce intégrale depuis a jusqu'à b de $f(x)\,dx$ et signifie $F(b)-F(a)$, intégrale parfaitement déterminée et qui porte le nom de intégrale définie. a est dit la limite inférieure, et b la limite supérieure; on peut d'ailleurs avoir $a >$ ou $< b$.

Je construis la courbe $y=f(x)$, dont je suppose les ordonnées réelles et finies, pour les valeurs de x que nous considérons.



Soit DM cette courbe, et $OA=a$; prenons $OP=x$ l'aire ADMP, a pour différentielle $f(x)\,dx$. En représentant par $F(x)+C$ l'intégrale générale; si nous déterminons C par la condition de donner la formule relative à toutes les aires comptées à partir de DA, nous remarquons qu'elle doit s'annuler pour $x=a$, ce qui donne $C=-F(a)$,

Donc aire $ADMP = F(x)-F(a) = \int_a^x f(x)\,dx$.

Mais dans cette formule OP a une valeur indéterminée; si nous prenons actuellement OP = b, nous aurons:

$$\text{aire } ADMP = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

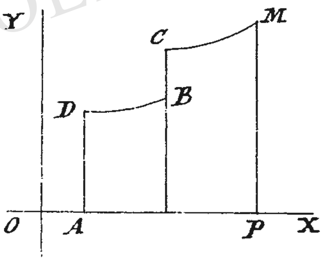
Ainsi l'intégrale définie, F(b) − F(a) est représentée par l'aire ADMP.

Il y a une précaution importante à prendre relativement à l'évaluation de cette aire; nous avons en effet, reconnu qu'elle avait pour limite la somme des rectangles inscrits, chaque rectangle étant représenté par le produit $y.\Delta x$ ou $f(x).\Delta x$; si donc nous supposons Δx positif, c'est-à-dire le point A à gauche du point P, les portions d'aires situées au dessous de l'axe des X, devront être considérées comme négatives, puisqu'elles sont la limite d'une somme de rectangles négatifs; et on devra regarder comme positives les portions d'aires situées au dessus de l'axe des X; Dans le cas contraire de Δx négatif; c'est-à-dire ici, si le point A est à droite de P, l'inverse aura lieu.

Nous venons de rappeler que l'aire ABPM est la limite de la somme des rectangles inscrits entre A et P; en regardant x comme variable indépendante, chacun de ces rectangles est représenté par $f(x)dx$, c'est donc la limite de la somme des $f(x)dx$, ou bien la somme des limites des $f(x)dx$, qui donnera l'aire ABPM; ou $\int_a^b f(x)\,dx$, ce qu'on exprime en disant que: <u>l'intégrale définie $\int_a^b f(x)\,dx$ est la somme des valeurs infiniment petites de la différentielle entre les limites d'intégration</u>, ou encore,

est la somme des éléments.

Nous avons supposé que pour les valeurs de x considérées $f(x)$ était réelle et finie, sans y apporter la condition de continuité; on voit en effet facilement, que la courbe peut comme DBCM, présenter une ou plusieurs discontinuités sans que les raisonnements cessent de s'appliquer; il suffit que la fonction ne soit pas constamment discontinue.



Voici une démonstration analytique du théorème que nous venons d'établir.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

on a

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

J'intercale entre a et b, les valeurs de x, $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}$ et soit: $\alpha_1 = a + h \quad \alpha_2 = \alpha_1 + h_1 \dots\dots\dots b = \alpha_{n-1} + h_{n-1}$

Nous aurons:

$F(a+h) - F(a)$ ou

$$F(\alpha_1) - F(\alpha) = h f(\alpha) + h\varepsilon$$
$$F(\alpha_2) - F(\alpha_1) = h_1 f(\alpha_1) + h_1 \varepsilon_1$$
$$F(\alpha_2) - F(\alpha_2) = h_2 f(\alpha_2) + h_2 \varepsilon_2$$
$$\vdots$$
$$F(b) - F(\alpha_{n-1}) = h_{n-1} f(\alpha_{n-1}) + h_{n-1} \varepsilon_{n-1}$$

En faisant la somme.

$$F(b) - F(\alpha) = h f(\alpha) + h_1 f(\alpha_1) + \dots + h_{n-1} f(\alpha_{n-1}) + h\varepsilon + h_1\varepsilon_1 + \dots + h_{n-1}\varepsilon_{n-1}$$

Chacune des quantités, $\varepsilon, \varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n-1}$ tend vers zéro en

même temps que $h, h_1, \ldots h_{n-1}$. Or en désignant par $\mathcal{E}$ la valeur absolue de la plus grande de ces quantités, nous aurons l'inégalité :

$$h\mathcal{E} + h_1\mathcal{E}_1 + \cdots + h_{n-1}\mathcal{E}_{n-1} < \mathcal{E}(h + h_1 + \cdots + h_{n-1})$$

ou bien

$$h_1 + h_1\mathcal{E}_1 + \cdots\cdots + h_{n-1}\mathcal{E}_{n-1} < \mathcal{E}(b-a)$$

inégalité vraie pour deux raisons, d'abord parce que chaque $\mathcal{E}$ a été remplacé par une valeur plus grande, ensuite parce que nous avons pris tous les produits additivement ; si l'on passe à la limite $\mathcal{E}(b+a)$ s'annule et il en est de même de la somme $h\mathcal{E} + h_1\mathcal{E}_1 + \cdots + h_{n-1}\mathcal{E}_{n-1}$.

Donc :

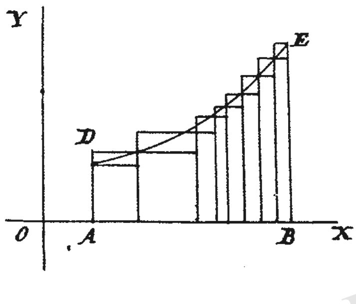
$$\mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a) \text{ ou } \int_a^b f(x)\,dx = \lim.\left(hf(a) + h_1 f(a_1) + \cdots + h_{n-1} f(a_{n-1})\right)$$

ce qu'il fallait démontrer.

Ceci fournit un moyen d'évaluer approximativement $\int_a^b f(x)\,dx$ dans le cas où l'on ne connaît pas $\mathbf{F}(x)$.

On évaluera la somme : $hf(a) + h_1 f(a_1) + \cdots + h_{n-1} f(a_{n-1})$ en prenant les valeurs $h, h_1, \ldots h_{n-1}$ suffisamment petites, et les valeurs $a, a_1, \ldots a_{n-1}$ suffisamment rapprochées.

C'est d'ailleurs ce qu'indique la construction géométrique, puisque cela revient à prendre la somme des rectangles intérieurs. On aurait pu prendre la somme des rectangles extérieurs, c'est-à-dire $hf(a_1) + h_1 f(a_2) + \cdots + h_{n-1} f(b)$ généralement on prend la moyenne arithmétique entre ces deux



sommes, ce qui donne :

$$\frac{h}{2}f(a)+\frac{h+h_1}{2}f(a_1)+\dots+\dots+\frac{h_{n-2}+h_{n-1}}{2}f(a_{n-1})+\frac{h_{n-1}}{2}f(b)$$

c'est-à-dire la somme des trapèzes, qui donne en général une valeur plus approchée de l'aire de la courbe.

Si on suppose les accroissements $h, h_1, \dots h_{n-1}$ égaux à h ces trois sommes deviennent :

$$h\left[f(a)+f(a_1)+\dots\dots+f(a_{n-1})\right]$$

$$h\left[f(a_1)+f(a_2)+\dots\dots+f(a_{n-1})+f(b)\right]$$

$$h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(a_1)+\dots+f(a_{n-1})+\frac{1}{2}f(b)\right]$$

La dernière a sur les deux autres l'avantage de la symétrie.

Lorsque dans une intégrale définie, on change les deux limites l'une dans l'autre, l'intégrale change de signe ainsi l'on aura $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Car soit $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, il en résulte :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(a)-F(b) = -\left[F(b)-F(a)\right] = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Cela résulte d'ailleurs de ce qu'une intégrale définie est la somme de ses différentielles infiniment petites et que dx ayant un signe différent dans les deux intégrales, il en est de même pour chaque différentielle partielle, et par suite pour la limite de la somme :

on a : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

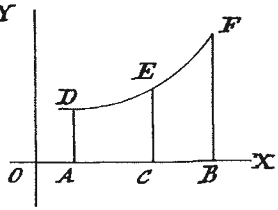
c étant ou non compris entre a et b, mais en admettant

$f(x)$ finie et réelle entre les limites de x que l'on considère.
On a en effet :

$$F(b) - F(a) = \left[F(c) - F(a)\right] + \left[F(b) - F(c)\right]$$

Démonstration géométrique.

fig. 1.



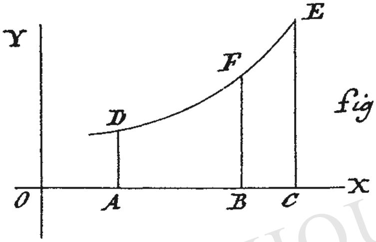


fig. 2.

Soit $OA = a$, $OC = c$, $OB = b$

Nous aurons dans fig. 1, aire ADBF = aire ADEC + aire CEFD

ou bien : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Dans le cas de la figure. 2.

aire ADFB = aire ADEC − aire BFEC

ou bien : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

Cela permettra de ramener la recherche d'une aire renfermant une partie positive et une partie négative à la recherche d'une aire entièrement positive et d'une aire entièrement négative.

Il est d'ailleurs facile de voir, que l'on a généralement

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^m f(x)\,dx + \int_m^n f(x)\,dx + \int_n^b f(x)\,dx$$

en admettant toujours, que $f(x)$ reste réelle et finie pour les valeurs de x que l'on considère.

Formules d'approximation.

Nous allons donner des formules, pour l'évaluation approchée d'une intégrale définie, qui donnent une approximation plus grande, que celles précédemment énoncées.

Soit à évaluer $\int_a^b f(x)\,dx$, désignons $\int f(x)\,dx$, supposée inconnue par $F(x)+C$.

Soit $a_1, a_2 \ldots\ldots a_{n-1}$ les diverses valeurs attribuées à x entre a et b, et h l'accroissement de x, que je supposerai constant, en passant d'une de ces valeurs à la suivante. J'aurai en négligeant les termes qui renferment une puissance de h, supérieure à la 4ème.

$$F(x+h)-F(x)=hf(x)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f'(x)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f''(x)+\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f'''(x)$$

et en remplaçant dans cette expression x, successivement par a, a_1, a_2, $\ldots\ldots a_{n-1}$

$$F(a_1)-F(a)=hf(a)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f'(a)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f''(a)+\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+f'''(a)$$

$$F(a_2)-F(a_1)=hf(a_1)+\frac{h^2}{1\cdot 2}f'(a_1)+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f''(a)+\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f'''(a).$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$F(b)-F(a_{n-1})=hf(a_{n-1})+\frac{h^2}{1\cdot 2}f'(a_{n-1})+\frac{h^3}{1\cdot 2\cdot 3}f''(a_{n-1})+\frac{h^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}f'''(a_{n-1})$$

Si nous posons:

$$S=f(a)+f(a_1)+\cdots+f(a_{n-1})$$

$$S'=f'(a)+f'(a_1)+\cdots+f'(a_{n-1})$$

$$S''\ f''(a)+f''(a_1)+\cdots+f''(a_{n-1})$$

$$S'''\ f'''(a)+f'''(a_1)+\cdots+f'''(a_{n-1})$$

nous aurons en faisant la somme de ces égalités :

$$F(b)-F(a)=hS+\frac{h^2}{1\cdot2}S'+\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}S''+\frac{h^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4}S'''.$$

Appliquons cette formule à la fonction f, en négligeant la 4^e puissance de h ; à la fonction f', en négligeant la 3^e et à la fonction f'' en négligeant la 2^e nous aurons :

$$f(b)-f(a)=hS'+\frac{h^2}{1\cdot2}S''+\frac{h^3}{1\cdot2\cdot3}S'''$$

$$f'(b)-f'(a)=hS''+\frac{h^2}{1\cdot2}S'''$$

$$f''(b)-f''(a)=hS'''$$

afin de ne négliger que les termes affectés d'une puissance de h supérieure à la 4^{ème}.

Multiplions la première de ces trois égalités par Bh, la 2^e par $B'h^2$, et la 3^e par $B''h^3$, et les combinant par voie d'addition avec la précédente, nous aurons :

$$F(b)-F(a)+Bh\left[f(b)-f(a)\right]+B'h^2\left[f'(b)-f'(a)\right]+B''h^3\left[f''(b)-f''(a)\right]$$

$$=hS+h^2S'\left(\frac{1}{1\cdot2}+B\right)+h^3S''\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{B}{1\cdot2}+B'\right]+h^4S'''\left[\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{B}{1\cdot2\cdot3}+\frac{B'}{1\cdot2}+B''\right]$$

Nous disposerons de B, B', B'' pour simplifier cette égalité en posant :

$$0=\frac{1}{1\cdot2}+B$$

$$0=\frac{1}{1\cdot2\cdot3}+\frac{B}{1\cdot2}+B'$$

$$0=\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{B}{1\cdot2\cdot3}+\frac{B'}{1\cdot2}+B''$$

D'où nous concluons, $B=-\frac{1}{2}$; $B'=\frac{1}{1\cdot2}$, $B''=0$.

Si au lieu de nous arrêter à la cinquième puissance de h, nous avions poussé le développement plus loin, nous aurions introduit de nouvelles quantités, B''', B^{IV} . . . . . déterminées par les équations :

$$0 = \frac{1}{1.2.3.4.5} + \frac{B}{1.2.3.4} + \frac{B'}{1.2.3} + \frac{B''}{1.2} + B'''$$

$$0 = \frac{1}{1.2.3.4.5.6} + \frac{B}{1.2.3.4.5} + \frac{B'}{1.2.3.4} + \frac{B''}{1.2.3} + \frac{B'''}{1.2} + B^{IV}$$

. . . .

nous en déduirons $B''' = -\frac{1}{720}$

$$B^{IV} = 0$$

On pourra reconnaître que tous les coefficiens, B'', B^{IV}, B^{VI} des puissances impaires de h, sont nulles ; et il en résulte qu'en s'arrêtant à une puissance paire de h, $2n$, on ne néglige que les termes qui renferment h, à la puissance $2n+2$.

L'égalité précédente nous donnera donc :

$$F(b)-F(a) \text{ ou } \int_a^b f(x)dx = h\left[f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(n-1)h)\right]$$
$$+\frac{1}{2}h\left[f(b)-f(a)\right]$$
$$-\frac{h^2}{1.2}\left[f'(b)-f'(a)\right]$$

Le terme suivant en poussant plus loin l'approximation serait : $+\frac{h^4}{720}\left[f'''(b)-f'''(a)\right]$. Et pour avoir autant de termes qu'on voudra, il suffira de connaître les quantités B^V, B^{VII} . . . que nous avons appris à calculer.

En fondant les deux premiers termes en un seul, la formule devient :

$$\int_a^b f(x)dx = h\left[\frac{1}{2}f(a)+f(a+h)+f(a+2h)+\cdots+f(a+(n-1)h)+\frac{1}{2}f(b)\right]$$
$$-\frac{h^2}{1\cdot 2}\left[f'(b)-f'(a)\right]$$
$$+\frac{h^4}{720}\left[f'''(b)-f'''(a)\right]$$

La première somme a déjà été indiquée, pour l'évaluation approchée de $\int_a^b f(x)dx$, c'est la somme de trapèzes dont nous avons parlé ; les autres termes sont appelés les termes de correction, et la rapidité de leur décroissance montre qu'on peut par leur emploi arriver à une très grande approximation.

Nous avons supposé jusqu'ici, que ni a ni b n'étaient infinis et que dans l'intervalle de ces deux limites $f(x)$ ne devenait jamais infini. Avant d'étudier certains cas particuliers, où ces circonstances se présentent, nous établirons le lemme suivant :

Si l'on considère les deux intégrales définies $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b \varphi(x)dx$, ayant les mêmes limites, on aura la relation :

$$\int_a^b f(x)dx \mp \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^b \left[f(x)\mp\varphi(x)\right]dx.$$

Soit en effet : $\int f(x)\,dx = f_1(x)$

$$\int \varphi(x)dx = \varphi_1(x)$$

Alors $\int_a^b f(x)\,dx = f_1(b) - f_1(a)$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \varphi_1(b) - \varphi_1(a)$$

or $\int \left[f(x) \mp \varphi(x)\right] dx = f_1(x) \mp \varphi_1(x)$

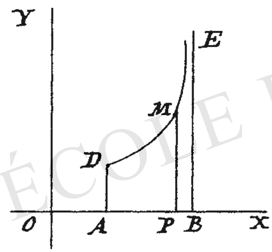
donc $\int_a^b \left[f(x) \mp \varphi(x)\right] dx = \left[f_1(b) \mp \varphi_1(b)\right] - \left[f_1(a) \mp \varphi_1(a)\right]$

$$= \left[f_1(b) - f_1(a)\right] \mp \left[\varphi_1(b) - \varphi_1(a)\right]$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx \mp \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

ce qu'il fallait démontrer.

Considérons maintenant une courbe DM ayant pour asymptote une droite BE; soit $OA = a$, $OB = b$, et proposons nous de chercher si $\int_a^b f(x)\,dx$, peut avoir un sens dans certains cas.



Or, si en partant de l'aire DAMP, nous reconnaissons que cette aire tend vers une certaine limite finie à mesure qu'on fait tendre OP vers OB, nous pourrons prendre cette limite pour définition de l'aire ADBE ou de $\int_a^b f(x)\,dx$; de même qu'une série est définie par la limite vers laquelle tend la somme de ses n 1ers termes.

Partons de $\int_a^x f(x)\,dx$, et faisons tendre x vers OB, si nous désignons par δ une valeur de x aussi rapprochée de b qu'on voudra, nous aurons:

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^x f(x)dx.$$

Il nous suffit donc de reconnaître si $\int_\alpha^x f(x)dx$, peut tendre vers une limite finie et déterminée : et en ajoutant à cette limite si elle existe, $\int_a^\alpha f(x)dx$; nous aurons la définition de l'aire **DABE**.

Examinons le cas particulier, où pour les valeurs de x, comprises entre α et b, on aurait constamment $f(x) < \frac{A}{(b-x)^m}$; $f(x)$ étant pour les valeurs de x considérées, supposée positive.

Il en résulte $\int_\alpha^x f(x)dx < \int_\alpha^x \frac{A\,dx}{(b-x)^m}$

On peut donner à cette inégalité les trois démonstrations suivantes :

1°. Chacune de ces intégrales est la somme de ses différentielles infiniment petites ; et puisque l'intervalle entre les deux limites est le même on peut considérer comme composées d'un même nombre de différentielles correspondant deux à deux au même accroissement dx ; et une différentielle quelconque de la 1ère intégrale est plus petite que la correspondante de la 2eme car l'on a : $f(x) < \frac{A}{(b-x)^m}$; donc l'inégalité subsiste pour les sommes.

2°. Nous avons vu qu'on avait l'égalité :

$$\int_\alpha^x f(x)dx - \int_\alpha^x \frac{A}{(b-x)^m}dx = \int_\alpha^x \left(f(x) - \frac{A}{(b-x)^m}\right)dx.$$

La différentielle de l'intégrale du 2^e membre étant négative, cette intégrale est elle-même négative, et par conséquent $\int_\alpha^x f(x)dx - \int_\alpha^x \frac{A\,dx}{(b-x)^m} < 0.$

3°. Si nous construisons la courbe $y = \frac{A}{(b-x)^m}$, par suite de l'hypothèse que nous avons faite, elle sera pour les valeurs de x que nous considérons située au dessus de l'axe des x, et en outre au dessus de la courbe DM, donc $\int_\alpha^x \frac{A\,dx}{(b-x)^m}$, c'est-à-dire l'aire de cette courbe correspondant aux deux abscisses α et x, sera plus grande que $\int_\alpha^x f(x)dx$, qui est l'aire de la première comprise entre les mêmes abscisses.

$$\text{Or, } \int \frac{A\,dx}{(b-x)^m} = -\int A(b-x)^{-m} d(b-x) = -\frac{A(b-x)^{-m+1}}{-m+1}$$

$$\text{Donc: } \int_\alpha^x \frac{A\,dx}{(b-x)^m} = A\frac{(b-\alpha)^{1-m}}{1-m} - \frac{A(b-x)^{1-m}}{1-m}$$

Admettons que l'on ait $m < 1$; alors pour $x = b$, le deuxième terme s'annulle, et l'intégrale prend une valeur finie; donc l'intégrale qui est plus petite ne grandit pas indéfiniment; et a la même limite $\frac{A(b-\alpha)^{1-m}}{1-m}$ ou une limite plus petite.

Supposons que l'on ait $f(x) = \frac{A-\varepsilon}{(b-x)^m}$, ε étant une

quantité très petite par rapport à A; et soit $\varepsilon = \frac{1}{n} A$.
Je dis que l'erreur commise en prenant pour valeur de la limite de $\int_\alpha^x f(x)\,dx$, la limite de $\int_\alpha^x \frac{A\,dx}{(b-x)^m}$, l'erreur commise sera $\frac{1}{n^e}$ de cette dernière limite.
nous avons en effet:

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx = \int_\alpha^x \frac{(A-\varepsilon)\,dx}{(b-x)^m} = \int_\alpha^x \frac{A\,dx}{(b-x)^m} - \int_\alpha^x \frac{\varepsilon\,dx}{(b-x)^m}.$$

Dans le 2^e membre chaque élément de la 2^e intégrale sera $\frac{1}{n^e}$ de l'élément correspondant de la 1^ère, donc cette intégrale est $\frac{1}{n^e}$ de la première, et en la négligeant, l'erreur commise sera ce que nous avons annoncé.

Si au lieu de faire l'hypothèse précédente, nous supposons que l'on a $f(x) > \frac{A}{(b-x)^n}$ et $m > 1$, ou $m=1$, nous allons reconnaître qu'il n'y a plus de limite et que l'intégrale grandit indéfiniment, on verra comme précédemment que l'on a

$$\int_\alpha^x f(x)\,dx > \int_\alpha^x \frac{A\,dx}{(b-x)^m}$$

$$\text{or} \int_\alpha^x \frac{A\,dx}{(b-x)^m} = A\frac{(b-\alpha)^{1-m}}{1-m} - \frac{A(b-x)^{1-m}}{1-m} = A\frac{1}{(m-1)(b-x)^{m-1}} - \frac{A}{(m-1)(b-\alpha)^{m-1}}$$

et pour $x=b$, cette intégrale devient infinie.

Pour le cas de $m=1$, on a:

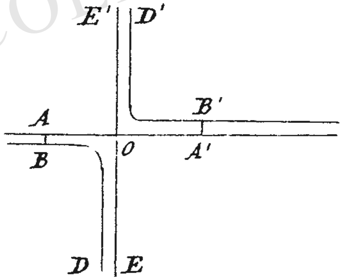
$$\int_\alpha^x \frac{A\,dx}{(b-x)} = -\int_\alpha^x \frac{A\,d(b-x)}{b-x} = -A\log.(b-x) + A\log.(b-\alpha).$$

en y faisant $x=b$, cette intégrale devient aussi infinie.

Voici un exemple, où la méthode générale pour trouver l'aire d'une courbe, appliquée au cas où la courbe

renferme des branches infinies, conduit à une absurdité évidente.

Prenons l'hyperbole équilatère dont l'équation est $y=\frac{1}{x}$, et appliquons la méthode à l'évaluation de l'aire comprise entre les points A et A', tel que $OA=OA'=1$; elle se compose de deux parties, ABDEO, A'B'OE'D' évidemment égales, et de signes contraires, et par conséquent elle est nulle.



D'après la méthode cherchons $\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$.

Or $\int\frac{dx}{x}=\log. x+c$

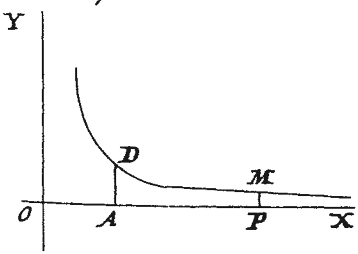
pour $x=-1$, $\log(-1)+c$

pour $x=1$ $\log.(1)+c$

$\int_{-1}^{+1}\frac{dx}{x}$ ou l'aire cherchée $=\log.(1)-\log.(-1)$, résultat absurde.

Ces sortes d'intégrales ne peuvent avoir aucun sens pour nous. Mr Cauchy est parvenu à les interpréter mais en partant d'une autre définition.

L'une ou l'autre des deux limites peut être infinie, ou elles peuvent l'être toutes les deux; cherchons si malgré cette circonstance, l'intégrale ne peut pas dans certains cas avoir une signification.



Je prends une courbe DM dont l'équation est $y=f(x)$ ayant pour asymptote l'axe des x; soit $OA=a$,

et $b=\infty$.

Déterminons l'intégrale qui représente l'aire ADMP et faisons tendre, OP vers ∞ α étant abscisse aussi grande qu'on voudra mais finie, nous aurons :

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^\alpha f(x)dx + \int_\alpha^x f(x)dx.$$

Il suffit de reconnaître si en considérant $\int_\alpha f(x)dx$, et faisant tendre x vers l'infini, cette intégrale tend vers une certaine limite.

Je dis que cela aura lieu, si à partir de la valeur $x=\alpha$, on a constamment $f(x) < \frac{A}{x^m}$, m étant > 1.
Nous aurons en effet :

$$\int_\alpha^x f(x)dx < \int_\alpha^x \frac{A}{x^m}dx$$

or $\int \frac{A\,dx}{x^m} = A\int x^{-m}dx = -\frac{A}{x^{m-1}(m-1)}$

Donc $\int_\alpha^a f(x)dx = -\frac{A}{x^{m-1}(m-1)} + \frac{A}{(m-1)\alpha^{m-1}}$

et pour $x=\infty$, nous avons un résultat fini ; donc $\int_\alpha^x f(x)dx$ tend vers une limite déterminée. Si au contraire on avait eu $fx > \frac{A}{x^m}$ et $m<1$ ou $m=1$ la limite n'existerait plus, car on aurait alors

$$\int_\alpha^x f(x)dx > \int_\alpha^x \frac{A\,dx}{x^m} \text{ et } \int_\alpha^x \frac{A\,dx}{x^m} = -\frac{A}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{A}{(m-1)\alpha^{m-1}}$$

$$= \frac{Ax^{1-m}}{1-m} - \frac{A\alpha^{1-m}}{1-m}$$

et pour $x=\infty$, l'intégrale devient infinie.

Dans le cas de $m = 1$

$$\int \frac{A\,dx}{x} = A \log. x$$

$$\int_{\alpha}^{x} \frac{A\,dx}{x} = A(\log. x - \log. \alpha),$$

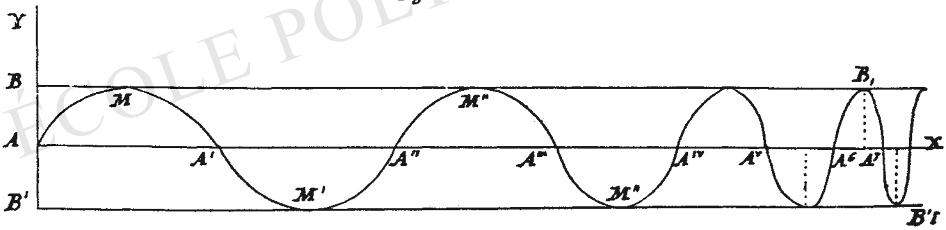
et pour $x = \infty$, l'intégrale devient encore infinie.

Voici deux exemples où d'autres circonstances permettent d'attribuer un sens à une intégrale, lorsqu'une de ses limites est infinie.

Ce sont les deux intégrales: $\int_0^\infty \cos.(x^2)\,dx$ et $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$.

Il s'agit de reconnaître que: $\int_0^\infty \cos.(x^2)\,dx$, $\int_0^\infty \sin(x^2)\,dx$, tendent vers une limite finie, lorsqu'on fait tendre x vers l'infini.

Occupons nous d'abord de $\int_0^x \sin.(x^2)\,dx$



Construisons la courbe $y = \sin.(x^2)$, et considérons la partie à droite de l'une des y de part et d'autre du quel elle est symétriquement placée. Les points $A, A', A'', A''', \ldots\ldots$ où elle rencontrera l'axe des x, nous seront donnés en prenant $x^2=0$, $x^2=\pi$, $x^2=2\pi$, $x^2=3\pi$, $\ldots\ldots$

et il est à remarquer que les intervalles $AA', A'A'', A''A''', \ldots$, vont en décroissant; ainsi $A'A'' < AA'$, car $AA' = \sqrt{\pi}$,
$A'A'' = \sqrt{2\pi} - \sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}\,(\sqrt{2}-1)$.

Dans tous ces intervalles le sinus passant de sin 0 à sin. π, de sin. π à sin 2π etc. Toutes ces spires seront tangentes aux deux droites BB_1, $B'B'_1$ telles que $AB_1 = AB'_1$. En outre les diverses aires, AMA', $A'M'A''$, ... sont alternativement positives ou négatives; je dis en outre que l'une quelconque d'entr'elles est plus grande en valeur absolue que la suivante, et qu'elle tend vers 0. Lorsque son rang s'éloigne de plus en plus.

En effet celle du rang n est égale à $\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx$,

en posant $x^2 = y$, ou $x = \sqrt{y}$; $dx = \dfrac{dy}{2\sqrt{y}}$. x variant de $\sqrt{n\pi}$ à $\sqrt{(n+1)\pi}$, nous aurons en nous fondant sur le principe du changement de variable indépendante établi dans la 40ème Leçon.

$$\int_{\sqrt{n\pi}}^{\sqrt{(n+1)\pi}} \sin(x^2)\,dx = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin.\, y.\frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

y doit varier de $n\pi$ à $(n+1)\pi$, en posant $y = n\pi + z$, il suffit de faire varier z de 0 à π, il viendra:

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin. y\frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_0^{\pi} \sin(n\pi+z)\,\frac{dz}{2\sqrt{n\pi+z}} = \int_0^{\pi} \cos. n\pi.\sin. z\,\frac{dz}{2\sqrt{n\pi+z}}$$

L'intégrale devient $\cos. n\pi \int_0^{\pi} \sin. z\,\dfrac{dz}{2\sqrt{n\pi+z}}$ or $\cos. n\pi = \pm 1$.

Si le rang n devient $n+1$, z varie toujours de 0 à π, et $\sin. z$ passe par les mêmes valeurs, mais $\dfrac{dz}{2\sqrt{n\pi+z}}$ décroit puisque le dénominateur augmente; les divers élémens deviennent donc plus petits et par conséquent l'intégrale

diminue en valeur absolue ; de plus si n augmente ~~indéfi-~~ niment chaque élément de l'intégrale sera infiniment petit par rapport à l'élément correspondant de la 1ère, donc l'intégrale sera infiniment petite par rapport à la 1ère qui est finie, et par conséquent l'aire sera elle-même infiniment petite.

Ainsi les aires sont alternativement positives et négatives, chacune d'elles est plus grande que la suivante, et celle de rang n tend vers 0, lorsque n augmente indéfiniment.

Donc, d'après ce qu'on a vu, en considérant la série formée par ces aires ; elle est convergente, et l'erreur commise en s'arrêtant à un terme est plus petite que le terme suivant

Puisque $\int_0^\infty \sin.(x^2)dx = \int_0^\infty \sin(y)\frac{dy}{2\sqrt{y}}$.

Cette intégrale est finie bien que $\int_0^x \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \sqrt{y}$ soit infinie, pour $x=\infty$. et $\int_0^x \sin(y)\,dy = -\cos.y + 1$ indéterminée.

Cependant $\int_0^\infty \sin(y)\,dy$ peut avoir une valeur finie, mais en particularisant la manière dont on fait tendre y vers ∞.

En effet :

$\int_0^{(2n+1)\frac{\pi}{2}} \sin(y)\,dy = -1$, a lors a encore lieu pour $n=\infty$ et $\int_0^\infty \sin(y)\,dy = -1$.

On ferait une discussion analogue pour le cas $\int_0^\infty \cos.(x^2)\,dx$.

Comme conséquence du lemme que nous avons établi plus haut, nous allons arriver à la série de Taylor.

R désignant la différence entre $f(x+h)$ et les n 1ers

termes :

$$f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\cdots\cdots+\frac{h^n}{1.2..n}f^n(x)$$

en posant $x+h=z$, d'où $h=z-x$, on est arrivé à :

$$R=f(z)-f(x)-\frac{z-x}{1}f'(x)-\frac{(z-x)^2}{1.2}f''(x)\cdots\cdots-\frac{(z-x)^n}{1.2..n}f^n(x)$$

en faisant varier x, depuis la valeur primitive x, jusqu'à z, on a en prenant la dérivée :

$$\frac{\partial R}{\partial x}=-\frac{(z-x)^n}{1.2..n}f^{n+1}(x)$$

Donc :

$$R=-\int_0^x\frac{(z-x)^n}{1.2..n}f^{n+1}(x)\,dx+C.$$

Car nous prenons deux intégrales d'une même différentielle, qui diffèrent par conséquent d'une constante ; et en prenant la valeur particulière $x=0$, nous trouvons que cette constante est nulle.

Donc :

$$R=-\int_z^x\frac{(z-x)^n}{1.2...n}f^{n+1}(x).$$

Désignons par M et m, la plus grande et la plus petite valeur que prend $f^{n+1}(x)$, x variant entre les limites que nous avons posées.

Nous aurons :

$$\frac{(z-x)^n}{1.2..n}f^{n+1}(x)<\frac{M(z-x)^n}{1.2...n};\ \frac{(z-x)^n}{1.2..n}f^{n+1}(x)>\frac{m(z-x)^n}{1.2...n}$$

en admettant $z>x$; si non, les inégalités changeraient de signe ; nous pourrons toujours en conclure que $\frac{M(z-x)^n}{1.2...n}$ et $\frac{m(z-x)^n}{1.2....n}$, sont deux limites de $\frac{(z-x)^n}{1.2..n}f^{n+1}(x)$;

et par conséquent $-\int_z^x \frac{(z-x)^n}{1.2\ldots n} f^{n+1}(x)\,dx$ ou R sera toujours compris entre les deux limites :

$$\int_z^x \frac{M(z-x)^n dx}{1.2\ldots n} \quad \text{et} \quad \int_z^x \frac{m(z-x)^n dx}{1.2\ldots\ldots n}$$

or $\int (z-x)^n dx = -\int (z-x)^n d(z-x) = -\frac{(z-x)^{n+1}}{n+1}$

Donc les deux limites entre lesquelles R reste toujours compris pour les valeurs de x considérées, et en particulier pour la valeur x primitive sont :

$$\frac{M(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots n(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{m.(z-x)^{n+1}}{1.2.3\ldots\ldots n(n+1)}$$

ou bien en posant $z-x=h$

$$\frac{M h^{n+1}}{1.2\ldots\ldots n\,(n+1)} \quad \text{et} \quad \frac{m h^{n+1}}{1.2\ldots\ldots n(n+1)}$$

D'ailleurs le raisonnement fait antérieurement pour arriver à ce résultat se réduit à celui que nous venons de faire.

Soit $\int f(x)\,dx = F(x)+C$

on a : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) = F[a+(b-a)]-F(a) = (b-a)\,f[a+\theta(b-a)]$

Car $F'(x)=f(x)$, nous avons donc :

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f\left[a+\theta(b-a)\right]$$

Seulement, $F'(x)$ ou $f(x)$ doit être une fonction continue, pour qu'on puisse appliquer cette formule.

Voici deux exemples d'intégrales définies, auxquelles on arrive par des simplifications de calcul remarquables.

La méthode repose sur le principe d'intégration par parties

1^er. Exemple : $\int_0^\infty e^{-x}. x^{n-1}. dx$, n est un nombre entier positif.

Il est facile de voir à priori que l'intégrale a un sens ; car nous savons que $e^{-x}. x^{n-1}$, tend vers zéro lorsque x augmente indéfiniment, donc à partir d'une certaine valeur de $x = \alpha$, on aura constamment :

$$e^{-x}. x^{n+1} < A, \text{ ou } e^{-x}. x^{n-1} < \frac{A}{x^2}$$

Or $\int_0^x e^{-x}. x^{n-1}. dx = \int_0^\alpha e^{-x}. x^{n-1}. dx + \int_\alpha^x e^{-x}. x^{n-1}\, dx$

et on rentre dans un cas déjà traité.

Occupons nous maintenant d'arriver à la valeur de l'intégrale définie

$$\int e^{-x}. x^{n-1}. dx = -\int x^{n-1} d(e^{-x}) = -x^{n-1}. e^{-x} + (n-1)\int e^{-x}. x^{n-2} dx$$

nous aurons

$$\int_0^x e^{-x}. x^{n-1}. dx = -x^{n-1}. e^{-x} + (n-1)\int_0^x e^{-x}. x^{n-2} dx + C$$

Si je fais $x = 0$, les divers termes s'évanouissent donc $C = 0$.

Passons au cas de $x = \infty$, $e^{-x}. x^{n-1}$ s'évanouit, et nous avons :

$$\int_0^\infty e^{-x}. x^{n-1} dx = (n-1). \int_0^\infty e^{-x}. x^{n-2} dx.$$

Puisque nous réduisons par là l'exposant de l'unité, il suffit de résoudre le problème dans le cas où cet exposant est zéro.

or $\int e^{-x} dx = -e^{-x}$, et donne -1 pour $x = 0$, et 0 pour $x = \infty$.

Donc $\int_0^\infty -e^{-x} = 1$.

Nous désignerons $\int_0^\infty e^{-x}. x^{n-1} dx$ par $\Gamma(n)$; notation introduite par Legendre et désignée sous le nom d'intégrale Eulerienne ;

seulement il suppose n positif mais quelconque, tandis qu'ici nous l'avons supposé entier.

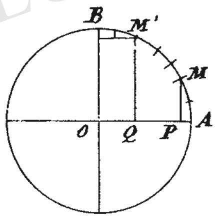
En appliquant la formule $\Gamma(n) = (n-1)\,\Gamma(n-1)$ et partant du résultat $\Gamma(1) = 1$, on obtient :

$$\Gamma(1) = 1$$
$$\Gamma(2) = 1$$
$$\Gamma(3) = 1.2$$
$$\Gamma(4) = 1.2.3$$
$$\Gamma(5) = 1.2.3.4.$$

$$\Gamma(n) = 1.2.3\ldots(n-2)(n-1)$$

2e Exemple : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin.^n x\, dx$, ou $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos.^n x\, dx$.

Il est d'abord facile de voir que ces deux intégrales sont égales. Divisons en effet le quadrant en un certain nombre de parties égales, et prenons l'une d'elles pour valeur de dx. Composons deux arcs AM et AM', tels que $AM = BM'$; nous aurons : $\sin. AM = \cos. AM'$, et $\sin. AM.dx = \cos. AM'.dx$. En passant à la limite, on voit que les éléments de la 1ère intégrale se reproduiront en même nombre et en sens inverse dans la 2ème ; que par conséquent elles sont égales. —



Nous prendrons la première :

$$\int \sin^n x\, dx = -\sin.^{n-1} x.\cos.x + (n-1)\int \sin.^{n-2} x.\cos.^2 x\, dx$$

$$\int_0^x \sin.^n x\, dx = -\sin.^{n-1} x \cos x + (n-1)\int_0^x \sin.^{n-2} x \cos^2 x\, dx + C,$$

et la constante est nulle, puisque pour $x=0$, nous trouvons $C=0$.

en faisant $x=\frac{\pi}{2}$, le terme, $-\sin^{n-1}x\cos x$, s'annulle et il vient :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x)dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x.dx-(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x.dx$$

D'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{n-1}{x}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x.dx.$

L'exposant se trouvant par là réduit de deux unités, il suffit de résoudre le problème dans le cas de $n=0$ et de $n=1$

Or $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ car $\int dx=x$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=1$ puisque $\int\sin x\,dx=-\cos x$.

Employons la notation : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=Y_n$

Nous aurons en employant la formule $Y_n=\frac{n-1}{n}Y_{n-2}$; et partant de $Y_0=\frac{\pi}{2}$ $Y_1=1$.

$Y_2=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, $Y_4=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, $Y_6=\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$ . . . .

$Y_3=\frac{2}{3}$, $Y_5=\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$, $Y_7=\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$ . . . .

et les trois formules générales :

$$Y_{2n}=\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-5}{2n-4}\cdots\cdots\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$Y_{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

$$Y_{2n-1}=\frac{2n-1}{2n-1}\cdot\frac{2n-4}{2n-3}\cdots\cdots\cdots\cdots\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}$$

Nous pourrons conclure de là, une valeur approchée de π.

On a en effet :

$Y_{2n-1} > Y_{2n} > Y_{2n+1}$.

Car sin. x, étant plus petit que 1 ; $\sin^k x$ est d'autant plus petit que K est plus grand, et $\sin^{2n-1} x > \sin^{2n} x > \sin^{2n+1} x$, d'où ;
$\sin^{2n-1} x . dx > \sin^{2n} x dx > \sin^{2n+1} x . dx$
les inégalités ayant lieu entre les éléments, sont aussi vraies entre les intégrales.

Il en résulte :

$$\frac{\pi}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1}$$

$$\frac{\pi}{2} > \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \cdots \frac{2n-2}{2n-3} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1}.$$

En désignant par P, le 2^e membre de la première inégalité j'aurai :

$$\frac{\pi}{2} < P, \text{ et } \frac{\pi}{2} > P . \frac{2n}{2n+1}.$$

Donc $\frac{\pi}{2} = P\left(1 - \frac{\theta}{2n+1}\right)$; θ étant entre 0 et 1, car
$P \frac{2n}{2n+1} = P \frac{2n+1-1}{2n+1} = P\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)$.

En prenant n assez grand, l'erreur pourra être aussi petite qu'on voudra, et la limite du produit P, sera la valeur de $\frac{\pi}{2}$; c'est une nouvelle espèce de série qu'on peut convertir en série ordinaire en prenant les logarithmes de part et d'autre.

Avant de passer aux intégrations par séries, faisons une remarque sur le changement, dans l'intégrale définie de variable indépendante.

Soit $\int_a^b f(x) dx$, introduisons la variable t, et prenons

$x=\varphi(t)$ d'où $dx=\varphi'(t)dt$ $\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$
Si x augmentant ou diminuant de a à b
lequel augmente ou diminue de α à β.

On aura :

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\,dt$$

Car $f(x)dx=f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt$
et aux divers accroissements de t, correspondent ceux de x $\Delta\varphi(t)$ qui deviennent à la limite les valeurs de dx ; de sorte que les deux intégrales sont composées du même nombre d'élémens égaux.

Si en même temps que x augmente de a à b, t décroît d'abord de α à γ et augmente ensuite de γ à b, certains accroissements de t, seront égaux et de signe contraire, et il pourra arriver que les élémens correspondants se détruisent, de sorte que les deux intégrales ne seraient pas composées du même nombre d'élémens. Il faut dans ce cas faire une discussion particulière.

Intégrations par Séries.

$f(x)$ étant la valeur d'une série convergente.
$\int_a^x f(x)dx$ sera aussi la limite d'une série convergente.

Soit : $f(x)=u_1+u_2+u_3+\cdots\cdots+u_n+R_n$.

Nous supposons que la série est convergente et égale à $f(x)$ entre les limites a et x.

$$f(x)dx=u_1\,dx+u_2\,dx+u_3\,dx+\ldots+u_n\,dx+R_n dx$$

On en conclut :

$$\int_a^x f(x)dx=\int_a^x u_1.dx+\int_a^x u_2.dx+\int_a^x u_3.dx+\cdots+\int_a^x u_n.dx+\int_a^x R_n dx$$

Soit en remarquant que les élémens sont égaux de part et

d'autre, soit en supprimant la constante C à ajouter au 2^e membre, et qui est nulle puisque tout s'évanouit pour $x=a$.

$\int_a^x R_n dx$ tend vers 0 lorsque n augmente indéfiniment; je désigne en effet par ε la plus grande valeur de R_n, x variant entre a et x j'aurai:

$$\int_a^x R_n dx < \int_a^x \varepsilon dx \quad \text{or} \int_a^x \varepsilon dx = \varepsilon \int_a^x dx = \varepsilon(x-a)$$

et puisque ε tend vers 0, lorsque n augmente indéfiniment il en est de même de $\varepsilon(x-a)$ ou $\int_a^x \varepsilon dx$ et par suite de $\int_a^x R_n dx$.

Donc dans l'intervalle des deux limites a et x:

$$\int_a^x f(x)dx = \int_a^x u_1 dx + \int_a^x u_2 dx + \int_a^x u_3 dx + \cdots\cdots$$

or $\int f(x)dx = \int_a^x f(x)dx + C$.

On aura par là la valeur de l'intégrale indéfinie.

Application:

On a:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \pm x^n \mp \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

x étant plus petit que 1, on a une série convergente, cherchons l'intégrale définie entre les limites 0 et x; nous aurons en appliquant la formule précédente

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\cdots$$

et le reste $R = \mp \int_0^x \frac{x^{n+1}dx}{1+x}$

Ce résultat peut s'écrire:

$$\log. x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots\dots$$

La démonstration a supposé $x < 1$; mais la formule peut s'appliquer dans le cas de $x = 1$, et l'on a :

$$\log. 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots\dots$$

Il suffit de démontrer que dans ce cas la série est encore convergente, ou bien que $\int_0^1 \frac{x^{n+1}.dx}{1+x}$ tend vers zéro à mesure que n augmente.

or $\int_0^1 \frac{x^{n+1}dx}{1+x} < \int_0^1 x^{n+1}dx$ puisque $\frac{x^{n+1}}{1+x} < x^{n+1}$

$\int_0^1 x^{n+1}dx = \frac{1}{n+2}$ et s'évanouit aussi pour $n = \infty$.

Il en est donc de même de $\int_0^1 \frac{x^{n+1}dx}{1+x}$.

Autre exemple :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \dots\dots \pm x^{2n} \mp \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$$

La série est convergente dans le cas de $x^2 < 1$. Donc

$$\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\dots\dots$$

ou bien

$$\text{arc. tang.}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots\dots$$

ici arc tang. x représente le plus petit arc soit positif soit négatif ayant x pour tangente ; car le deuxième membre s'évanouissant pour $x = 0$, il doit en être de même de arc. tang. x ; or en désignant par ((arc. tang. x)) la formule générale de tous ces arcs, et arc tang x le plus petit on a : ((arc. tang x)) = arc. tang. $x \pm K\pi$ et arc tang. x

est le seul qui s'évanouisse pour $x=0$.

Pour appliquer cette formule au cas de $x=1$, ce qui donnera arc tang. 1 ou $\frac{\pi}{4}$; il faut reprendre le raisonnement et reconnaître que la série ne cesse pas d'être convergente.

Or. $\int_0^x \frac{x^{2n+2}.dx}{1+x^2} < \int_0^x x^{2n+2}.dx$

et $\int_0^x x^{2n+2}.dx = \frac{x^{2n+3}}{2n+3}$, $\int_0^1 x^{2n+2}.dx = \frac{1}{2n+3}$

Donc $\int_0^1 \frac{x^{2n+2}.dx}{1+x^2} < \frac{1}{2n+3}$ et s'annulle pour $n=\infty$.

Nous aurons en appliquant la formule

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots\dots$$

π est donné par une série convergente, dont on peut par des transformations augmenter beaucoup la convergence.

Employons la formule de Maclaurin.

$$f(x) = f[a+(x-a)] = f(a) + \frac{x-a}{1}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''(a) + R$$

Donc.

$$\int f(x)dx = \int f(a)dx + \int \frac{x-a}{1}f'(a)dx + \int \frac{(x-a)^2}{1.2}f''(a)dx + \int \frac{(x-a)^3}{1.2.3}f'''(a)dx + \int R dx$$

On en conclue, en prenant l'intégrale définie entre a et x, que la constante C que l'on doit placer au second membre est nulle ; on doit l'y placer, car si $M(x)$ et $N(x)$ sont les deux intégrales définies du 1er et du 2e membre, entre a et b ; elles ont une même différentielle et diffèrent par conséquent par une constante, que nous reconnaissons être nulle, en considérant la valeur $x=0$, pour laquelle tout s'évanouit.

Donc :

$$\int_a^x f(x)\,dx = f(a)\int_a^x dx + f\frac{'(a)}{1}\int_a^x (x-a)\,dx + \frac{f''(a)}{1.2}\int_a^x (x-a)^2\,dx + \frac{f'''(a)}{1.2.3}\int_a^x (x-a)^3\,dx$$
$$+\int_a^x R.$$

Or: $\int_a^x dx = x-a$, $\int_a^x (x-a)\,dx = \frac{(x-a)}{2}$, $\int_a^x (x-a)^2\,dx = \frac{(x-a)^3}{3}$.

et $\int_a^x (x-a)^3\,dx = \frac{(x-a)^4}{4}$.

La formule devient en substituant:

$$\int_a^x f(x)\,dx = f(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{1.2}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{1.2.3}(x-a)^3 + \frac{f'''(a)}{1.2.3.4}(x-a)^4 + \int_a^x R$$

Et on pourrait pousser plus loin le développement; b étant la deuxième limite il devient:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(a)(b-a) + \frac{f'(a)}{1.2}(b-a)^2 + \frac{f''(a)}{1.2.3}(b-a)^3 + \frac{f'''(a)}{1.2.3.4}(b-a)^4 + \int_a^b R.$$

Si le développement est limité, on pourra connaître exactement l'intégrale définie; s'il est illimité, mais forme une série convergente, on pourra le calculer approximativement.

Voici une autre formule souvent employée:

$$\int f(x)\,dx = \int f(x)\,d(x-a) = f(x)(x-a) - \int (x-a)\,f'(x)\,dx.$$

En prenant l'intégrale définie entre a et x, et négligeant la constante C qui sera encore nulle:

$$\int_a^x f(x)\,dx = f(x)(x-a) - \int_a^x (x-a)\,f'(x)\,dx$$

On aura de même, en passant de l'intégrale indéfinie à l'intégrale définie:

$$\int_a^x (x-a)f'(x)\,dx = \int_a^x \frac{f'(x)}{2}.d(x-a)^2 = \frac{f'(x)}{2}.(x-a)^2 - \frac{1}{2}\int_a^x f''(x)(x-a)^2\,dx$$

$$\int_a^x f''(x)(x-a)^2\,dx = f''\,\frac{(x-a)^3}{3} - \frac{1}{3}\int_a^x f'''(x).(x-a)^3\,dx$$

Il vient en substituant :

$$\int_a^x f(x)dx = f(x)(x-a) - \frac{f'(x)}{1}(x-a)^2 + \frac{f''(x)}{1.2.3}(x-a)^3 - \frac{1}{1.2.3}\int_a^x f'''(x)(x-a)^3 dx$$

On aperçoit facilement la loi de composition des termes; et pour la démontrer générale, supposons-la vraie pour $n+1$ termes.

Admettons qu'on ait :

$$\int_a^x f(x)dx = f(x)(x-a) - \frac{f'(x)}{1}(x-a)^2 + \frac{f''(x)}{1.2.3}(x-a)^3 \dots + \frac{f''(x)}{1.2.3(n+1)}(x-a)^{n+1}$$

$$\mp \frac{1}{1.2.3\dots(n+1)}\int_a^x f^{n+1}(x)\,(x-a)^{n+1}dx.$$

Démontrons que la loi subsistera en introduisant un terme de plus; or cela est évident puisque :

$$\int_a^x f^{n+1}(x)(x-a)^{n+1}dx = f^{n+1}(x)\,\frac{(x-a)^{n+2}}{n+2} - \frac{1}{n+2}\int_a^x f^{n+1}(x).(x-a)^{n+2}dx.$$

Si pour $n=\infty$, le reste devient infiniment petit, on aura une série convergente, qui sera le développement de l'intégrale définie. D'ailleurs en désignant par M et m, la plus grande et la plus petite valeur que prend $f^{n+1}(x)$, pour les valeurs de x considérées;

$f^{n+1}(x).(x-a)^{n+1}$ aura deux limites $M(x-a)^{n+1}$; $m.(x-a)^{n+1}$

et $\frac{1}{1.2.3\dots(n+1)}\int_a^x f^{n+1}(x)(x-a)^{n+1}dx$, aura pour limites :

$$\frac{1}{1.2.3\dots(n+1)}\int_a^x M(x-a)^{n+1}.dx, \text{ ou } \frac{1}{1.2.3\dots(n+1)}.\frac{M.(x-a)^{n+2}}{n+2}$$

et $$\frac{1}{1.2.3\dots(n+1)}\int_a^x m(x-a)^{n+1}.dx, \text{ ou } \frac{1}{1.2.3\dots(n+1)}.\frac{m(x-a)^{n+2}}{n+2}.$$

On pourra donc avoir deux limites de l'erreur commise

en s'arrêtant à un certain terme.

Il peut arriver que le reste s'annulle, et que la série se réduise à un nombre limité de termes. On connaîtra exactement l'intégrale définie, et on pourra en déduire l'intégrale indéfinie.

Avant d'en donner un exemple, nous établirons le principe suivant. Soit $f(x) = u_1 + u_2 + \cdots\cdots$

$u_1, u_2, \ldots$ étant des expressions imaginaires, et formant une série, on aura :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u_1\,dx + \int_a^b u_2\,dx + \cdots\cdots$$

En effet : soit $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}\, f_2(x)$

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \sqrt{-1}\int f_2(x)\,dx = F_1(x) + \sqrt{-1}\, F_2(x) + C$$

Soit $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$

d'où $F(x) = F_1(x) + \sqrt{-1}\, F_2(x) + C'$.

Il en résulte, en passant aux intégrales définies entre b et a

$$F(b) - F(a) = F_1(b) - F_1(a) + \sqrt{-1}\left(F_2(b) - F_2(a)\right)$$

ou

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \sqrt{-1}\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Revenons à :

$$f(x) = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots\cdots$$

désignons u_1 par $p_1 + q_1\sqrt{-1}$, u_2 par $p_2 + q_2\sqrt{-1}$ etc....

et soit $f_1(x) = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots$

$f_2(x) = q_1 + q_2 + q_3 + \cdots\cdots$

$$\int_a^b f_1(x)\,dx = \int_a^b p_1\,dx + \int_a^b p_2\,dx + \cdots\cdots$$

$$\int_a^b f_2(x)\,dx = \int_a^b q_1\,dx + \int_a^b q_2\,dx + \cdots\cdots$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \times \sqrt{-1} = \int_a^b p_1 dx + \sqrt{-1}\int_a^b q_1 . dx$$
$$+ \int_a^b p_2 dx + \sqrt{-1}\int_a^b q_2 dx + \dots$$
$$= \int_a^b (p_1 + \sqrt{-1}q_1)dx + \int_a^b (p_2 + q_2\sqrt{-1})dx + \dots$$

Donc :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \dots$$ ce qu'il fallait démontrer.

Prenons la série :

$$\frac{1}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}} = 1 + \alpha e^{x\sqrt{-1}} + \alpha^2 . e^{2x\sqrt{-1}} + \alpha^3 . e^{3x\sqrt{-1}} + \dots$$

Elle est convergente en supposant le module $\alpha^2 < 1$.

Et d'après le principe précédent nous aurons :

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}} = \int_0^{2\pi} dx + \int_0^{2\pi} \alpha e^{x\sqrt{-1}} . dx + \dots + \int_0^{2\pi} \alpha^n . e^{nx\sqrt{-1}} dx.$$

Je vais démontrer que la valeur du premier terme est 2π, et que tous les autres sont nuls.

$$\text{Or, } \int \alpha^n . e^{nx\sqrt{-1}} . dx = \frac{\alpha^n . e^{nx\sqrt{-1}}}{n\sqrt{-1}} + C$$

$$\int_0^{2\pi} \alpha^n . e^{nx\sqrt{-1}} . dx = \frac{\alpha^n . e^{2\pi . n\sqrt{-1}}}{n\sqrt{-1}} - \frac{\alpha^n}{n\sqrt{-1}}$$

$$\text{Or : } e^{2n.\pi\sqrt{-1}} = \cos . 2n\pi + \sqrt{-1}\sin . 2n\pi = 1.$$

Donc cette intégrale définie est nulle, et il en est de même de tous les termes à l'exception du premier.

$$\text{D'ailleurs } \int_0^{2\pi} dx = 2\pi.$$

$$\text{Donc : } \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}} = 2\pi$$

Pour démontrer que $\int_0^{2\pi} e^{nx\sqrt{-1}}\,dx=0$, nous avons supposé n entier et positif; mais la démonstration peut évidemment s'appliquer au cas de n entier et négatif.

Enfin ce résultat subsisterait encore, si les deux limites étaient b et $b+2\pi$; car la valeur de l'intégrale définie est alors:

$$\frac{e^{nb\sqrt{-1}}.e^{2n\pi\sqrt{-1}}}{n\sqrt{-1}} - \frac{e^{nb\sqrt{-1}}}{n\sqrt{-1}}$$

Et elle est nulle, puisque $e^{2n\pi\sqrt{-1}}=1$,
et cela a lieu pour n entier positif ou négatif.

Nous avons supposé le module $\alpha<1$; supposons maintenant $\alpha>1$.

Posons: $\alpha e^{x\sqrt{-1}}=z$

$$\frac{1}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}}=\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\right)=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)$$

Puisque $\frac{1}{z}$ est plus petit que 1; donc:

$$\frac{1}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}}=-\frac{1}{\alpha}e^{-x\sqrt{-1}}-\frac{1}{\alpha^2}e^{-2x\sqrt{-1}}-\frac{1}{\alpha^3}e^{-3x\sqrt{-1}}-\cdots\cdots$$

Donc: $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}}=0.$

Puisque nous avons reconnu que $\int_0^{2\pi} e^{-nx\sqrt{-1}}.\,dx=0$

$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}}$ représente donc une fraction analytique discontinue.

Reprenons $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}}=2\pi$ et remplaçons $e^{x\sqrt{-1}}$ par

cos. $x + \sqrt{-1}$ sin. x, nous aurons:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-\alpha \cos.x - \alpha\sqrt{-1}\sin.x} = \int_0^{2\pi} \frac{(1-\alpha\cos.x+\alpha\sqrt{-1}\sin x)\,dx}{1-2\alpha\cos.x+\alpha^2}$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(1-\alpha\cos.x)\,dx}{1-2\alpha\cos.x+\alpha^2} + \alpha\sqrt{-1}\int_0^{2\pi} \frac{\sin.x\,dx}{1-2\alpha\cos.x+\alpha^2}$$

puisque cela doit être égal à 2π, le coefficient de l'imaginaire sera nul, et le coefficient réel égal à 2π.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = \int_0^{2\pi} \frac{(1-\cos\alpha)\,dx}{1-2\alpha\cos.x+\alpha^2} = 2\pi.$$

On peut de la 2e intégrale, en conclure une 3e en remarquant que:

$$1-\alpha\cos.x = \frac{1}{2}\left(1-2\alpha\cos.x+\alpha^2+1-\alpha^2\right),$$ en substituant:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dx + \frac{1}{2}(1-\alpha^2)\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2\alpha\cos.x+\alpha^2} = 2\pi$$

or $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,dx = \pi$, on a donc la formule: $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2\alpha\cos.x+\alpha^2} = \frac{2\pi}{1-\alpha^2}$.

Remarquons que l'intégrale de 0 à 2π renferme deux fois chaque élément de l'intégrale de 0 à π; par conséquent on a encore:

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{1-2\alpha\cos.x+\alpha^2} = \frac{\pi}{1-\alpha^2}.$$

Il faut pour cela supposer $\alpha < 1$; dans le cas de $\alpha > 1$, on aura des formules analogues, en égalant à 0 le coefficient réel et le coefficient imaginaire.

On peut d'ailleurs reconnaître à priori que $\int_0^{2\pi} \frac{\sin.x\,dx}{1-2\alpha\cos x+\alpha^2} = 0.$

Car les arcs qu'on trouve en allant de 0 à π ont un cosinus égal et un sinus égal et de signe contraire à ceux dont les extrémités aboutissent entre π et 2π; les éléments de l'intégrale sont donc deux à deux égaux et de signes contraires, et par suite l'intégrale est nulle.

Si nous multiplions le développement de $\frac{1}{1-\alpha e^{x\sqrt{-1}}}$ dans le cas de $\alpha < 1$ par $e^{-nx\sqrt{-1}}$ les termes seront de la forme: $\alpha^k . e^{(k-n)x\sqrt{-1}}$, et donneront des intégrales nulles, lorsqu'on intégrera entre 0 et 2π, à l'exception du terme $\alpha^n . e^{nx\sqrt{-1}}$ qui deviendra α^n, et donnera:

$$\int_0^{2\pi} \alpha^n dx = 2\pi\alpha^n.$$ De sorte qu'on aura:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{-nx\sqrt{-1}} . dx}{1-\alpha . e^{x\sqrt{-1}}} = 2\pi . \alpha^n.$$

Si au contraire on prend pour facteur $e^{nx\sqrt{-1}}$ toutes les intégrales seront nulles, et on aura:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{nx\sqrt{-1}} dx}{1-\alpha . e^{x\sqrt{-1}}} = 0$$

En faisant dans ces deux formules des substitutions analogues à celles que nous avons faites dans les précédentes, on en conclura les valeurs d'autres intégrales.

Généralisons ces résultats.

Soit $f(\alpha . e^{x\sqrt{-1}})$ une fonction développable en série; c'est-à-dire qu'en posant $z = \alpha . e^{x\sqrt{-1}}$, on ait:

$$f(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots\cdots$$
$$+ A_1' z^{-1} + A_2' z^{-2} + \cdots\cdots$$

Pour les valeurs de x comprises entre 0 et 2π.

On a par conséquent :

$$f(\alpha.e^{x\sqrt{-1}}) = A_0 + A_1.\alpha.e^{x\sqrt{-1}} + A_2\alpha^2.e^{2x\sqrt{-1}} + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{A_1}{\alpha}.e^{-x\sqrt{-1}} + \frac{A_2'}{\alpha^2}\ e^{-2x\sqrt{-1}} + \cdots\cdots$$

Multiplions par dx les deux membres, et prenons les intégrales définies entre 0 et 2π ; tous les termes disparaissent excepté le premier et il vient :

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha.e^{x\sqrt{-1}}) = 2\pi A_0$$

et l'égalité subsiste pour le cas où les limites sont b et $b+2\pi$

$$\int_b^{b+2\pi} f(\alpha.e^{x\sqrt{-1}}) = 2\pi A_0.$$

En introduisant le facteur $e^{-nx\sqrt{-1}}$, l'égalité devient

$$\int_0^{2\pi} e^{-nx\sqrt{-1}}.f(\alpha e^{x\sqrt{-1}}) = A_n\alpha^n.2\pi.$$

Enfin si c'est par le facteur $e^{nx\sqrt{-1}}$ qu'on multiplie :

$$\int_0^{2\pi} e^{nx\sqrt{-1}} f(\alpha.e^{x\sqrt{-1}}) = \frac{A_n'}{\alpha^n}\ 2\pi.$$

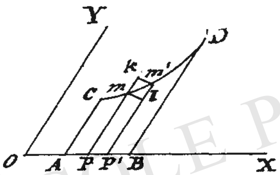
Toutes ces inégalités résultent des démonstrations précédentes.

Quadrature des courbes.

La méthode générale consiste à diviser l'aire en parties infiniment petites dans une de leurs dimensions, et telles qu'en négligeant les infiniments petits d'un ordre supérieur au premier on puisse le mettre sous la forme $f(x)\,dx$; la somme de ces parties, ou l'intégrale définie donnera l'aire.

Nous allons justifier cette méthode en l'appliquant aux coordonnées rectilignes et aux coordonnées polaires.

Prenons pour plus de généralité, des axes obliques OX et OY et faisant entre eux un angle θ.



Soit $OB = b$, $OA = a$

En menant des parallèles à l'axe des Y, je détermine des parties telles que $PP'mm'$; il est évident que si l'on voulait évaluer exactement l'aire $PP'mm'$, la difficulté serait la même, et la solution ne serait pas avancée ; mais je dis qu'on peut en passant à la limite ne considérer que l'aire du parallélogramme $PP'mI$, représentée par $y \sin\theta\, dx$, et négliger la partie mIm', infiniment petite du 2e ordre, puisqu'en prenant m' assez rapproché de m, elle est plus petite que le parallélogramme $mKm'I$, lui-même infiniment petit par rapport à $PP'mI$, comme ayant même base et un côté mK infiniment petit par rapport à mP.

En effet, soit $mK = \frac{1}{n}.\, mP$, il en résulte aire $mm'I < \frac{1}{n}\, mIPP'$, et en disposant les ordonnées de manière à ce qu'il en soit de même pour toutes les parties,

l'erreur commise en prenant la somme des parallélogrammes sera plus petite que $\frac{1}{n^2}$ de cette somme; en prenant dx assez petit je pourrai rendre la fonction $\frac{1}{n}$ aussi petite que je voudrai; donc en passant à la limite l'erreur deviendra nulle et j'aurai :

$$\text{aire } ACDB = \int_a^b y.\sin.\theta\, dx = \sin.\theta \int_a^b y.\, dx$$

car l'intégrale définie est la somme de ses différentielles infiniment petites. Nous nous appuyons sur ce que

$$\int_a^b A\, f(x)\, dx = A \int_a f(x)\, dx.$$

Cette proposition est facile à démontrer.

En effet, A étant facteur dans chacun des éléments, on peut le mettre facteur dans la somme.

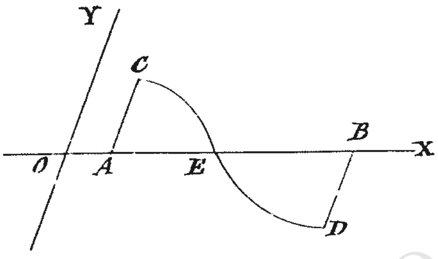
On peut encore dire :

$$\int A\, f(x)\, dx = A\, F(x) + C', \text{ en admettant : } \int f(x)\, dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b A f(x)\, dx = A\left[F(b) - F(a)\right] = A \int_a^b f(x)\, dx$$

S'il y a dans l'aire une portion positive et une portion négative AEC et BDE, on aura en posant $OA = a$, $OE = \alpha$, $OB = b$

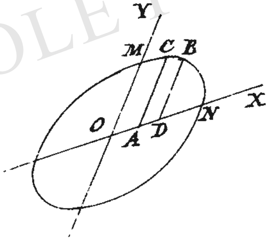
$$\int_a^b y \sin\theta.\, dx = \int_a^\alpha y \sin.\theta\, dx + \int_\alpha^b y \sin\theta\, dx$$



et on sera ramené à évaluer séparément chacune de ces intégrales; si l'on veut avoir l'aire totale on prendra leur différence.

Prenons pour application

une ellipse rapportée à un système de diamètres conjugués, OX, OY dont les longueurs sont : α et β.



l'équation est : $\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1.$

et si $OA=a$, $OD=b$

$$\text{aire } ACBD=\int_a^b y.\sin.\theta\, dx=\int_a^b \beta \sin.\theta . dx\sqrt{1-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

$$=\frac{\beta}{\alpha}\sin.\theta\int_a^b dx.\sqrt{\alpha^2-x^2}$$

Le problème sera donc résolu, si l'on connait $\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$; or en multipliant et divisant à la fois par $\sqrt{\alpha^2-x^2}$, on a :

$$\int\sqrt{\alpha^2-x^2}.\,dx=\alpha^2\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}$$

en y substituant :

$$\int\frac{dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=\text{arc. sin.}\frac{x}{\alpha}$$

$$\int x.\frac{x\,dx}{\sqrt{\alpha^2-x^2}}=-x.\sqrt{\alpha^2-x^2}+\int\sqrt{\alpha^2-x^2}.\,dx.$$

l'équation donne :

$$\int\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\frac{\alpha^2}{2}\text{arc. sin.}\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}.$$

On aura donc facilement l'aire ADBC ; mais servons nous de ce résultat pour trouver avec OMN ou $\dfrac{\beta}{\alpha}\sin.\theta\int_0^\alpha dx\sqrt{\alpha^2-x^2}$, nous aurons :

$$\int_0^x dx.\sqrt{\alpha^2-x^2}=\frac{\alpha^2}{2}\text{arc sin.}\frac{x}{\alpha}+\frac{x}{2}\sqrt{\alpha^2-x^2}+C.$$

Si nous convenons de prendre pour arc sin $\dfrac{x}{\alpha}$, celui qui s'annule pour $x=0$, nous aurons $C=0$, car pour $x=0$, tous

s'évanouir. L'égalité donne pour le cas de $x=\alpha$

$\int_0^\alpha dx\sqrt{\alpha^2-x^2}=\frac{\alpha^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$, puisque tous les autres arcs étant égaux à $\frac{\pi}{2}\pm 2K\pi$, ne peuvent s'annuller pour $x=0$; il suffit pour le reconnaître de suivre la marche de x, de 0 à α, il en résulte: aire $OMN=\frac{\beta}{\alpha}\sin.\theta.\frac{\alpha^2}{2}.\frac{\pi}{2}=\frac{\pi.\alpha\beta.\sin.\theta}{4}$.

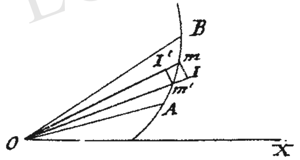
Donc l'aire totale de l'ellipse ou 4 aire $OMN=\pi\alpha.\beta\sin.\theta$.

En passant à un autre système de diamètres conjugués α' et β' faisant entr'eux un angle θ', l'aire sera encore représentée par $\pi.\alpha'\beta'\sin.\theta'$, on en conclut:

$\pi\alpha.\beta\sin\theta=\pi.\alpha'\beta'\sin.\theta'$ ou $\alpha.\beta.\sin.\theta=\alpha'.\beta'\sin.\theta'$.

On retrouve ce théorème, que les parallélogrammes construits sur un système de diamètres conjugués, ont une aire constante, et appliquant la formule au cas des deux axes, on a pour l'aire de l'ellipse, $\pi a.b$, a et b étant les deux demi-axes.

Soit OX l'axe polaire, AB la courbe et OAB l'aire à évaluer.



Je partage l'aire OAB en parties telles que Omm', en menant les rayons vecteurs Om, Om'....etc; si on voulait évaluer l'aire Omm', la difficulté seroit la même; mais nous y substituerons l'aire du secteur $Om'I'$, et l'erreur commise, plus petite, en prenant m assez rapproché de m', que la différence $I'mIm'$ entre les deux secteurs OmI, $Om'I'$, sera infiniment petit du second ordre, si aire $Om'I'$ est un infiniment petit du premier ordre; Admettons que cette erreur soit $\frac{1}{n'}$ du secteur, et qu'il en soit de même

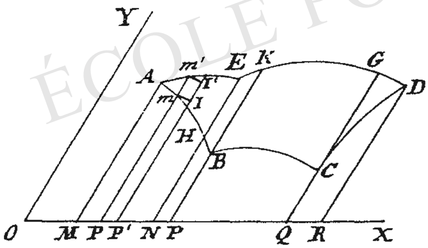
pour chaque partie ; dans la somme, l'erreur sera $\frac{1}{n^e}$ de la somme des secteurs ; en rapprochant suffisamment le point m de m', on pourra rendre cette fraction, et partant l'erreur totale aussi petite qu'on voudra ; donc en passant à la limite, l'erreur est nulle.

En désignant l'angle I'om' par $d\theta$, et par r le rayon vecteur, l'aire du secteur est égale à l'arc $r.d\theta$ multiplié par $\frac{1}{2}r$, ou bien $\frac{1}{2}r^2 d\theta$; et la somme de ces aires donne à la limite $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}.r^2.d\theta$.

En posant : $\theta_1 = AOX$, et $\theta_2 = BOX$.

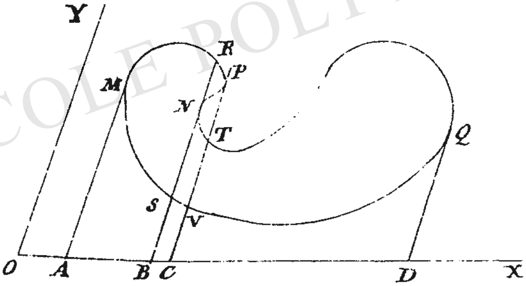
Proposons nous d'évaluer l'aire ABCDE formée par diverses courbes AB, BC, CD, DE,

Je considérerai successivement les aires AEH, EKHB, BKGC, CGD.



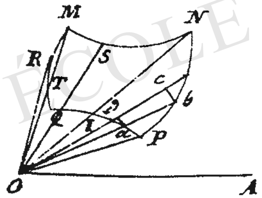
Pour évaluer aire AEH, je menerai des parallèles à l'axe des y, et on verra comme précédemment, qu'on est ramené à trouver la limite de la somme des parallélogrammes tels que mm'I'I ; et il en sera de même pour les autres portions d'aires, de sorte qu'en désignant les coordonnées des courbes AB, BC, CD, DE, AE par y, y_1, y_2, Y_1, Y et posant
$OM = x_1$, $ON = x_2$, $OP = x_3$, $OQ = x_4$, $OR = x_5$, nous aurons :

$$\text{aire } ABCDE = \int_{x_1}^{x_2} (Y-y)\sin\theta\,dx + \int_{x_2}^{x_3} (Y_1-y)\sin\theta\,dx + \int_{x_3}^{x_4} (Y_1-y_1)\sin\theta\,dx$$
$$+ \int_{x_4}^{x_5} (Y_1-y_2)\sin\theta\,dx$$



Si l'on a à évaluer l'aire d'une courbe fermée, telle que MPNQ. On mènera toutes les tangentes parallèles à l'axe des Y, et on sera ramené à évaluer séparément les aires MRS, NRP, NSTV, TVQ ; ce qu'on fera comme précédemment au moyen d'intégrales définies, en ayant bien soin de distinguer quelle est la valeur de l'ordonnée, qui correspond à une portion d'arc de la courbe.

Pour évaluer aire MNPQR, je mènerai les rayons vecteurs, OP, OIN, OQS, OPM et la tangente OR.

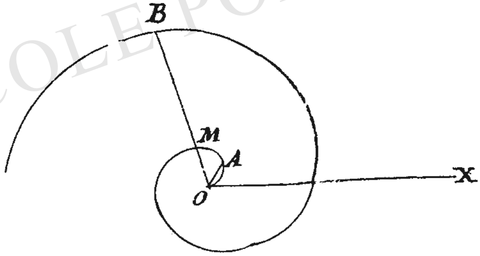


On est ramené à évaluer séparément les aires, IPN, IQSN, QTSM, RTM.

Occupons nous de l'une d'elles, de l'aire IPN. On reconnaîtra facilement qu'il suffit de faire la somme à la limite des aires telles que a b c d, différence de deux secteurs et égale à $\frac{1}{2}R^2d\theta - \frac{1}{2}r^2d\theta = \frac{1}{2}(R^2-r^2)d\theta$; R désignant le rayon vecteur correspondant à PN, et r celui correspondant à PQ.

Donc aire IPN $= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}(R^2-r^2)\,d\theta$, en posant angle POA $= \theta_1$, angle NOA $= \theta_2$.

Considérons la spirale $r = a\,\theta$ et proposons nous d'évaluer l'aire comprise entre deux rayons vecteurs OA et OB; on peut la définir de deux manières, ou bien la regarder comme engendrée par le rayon vecteur de OA à OB et comprenant deux fois la portion OAM, ou bien ne considérer que la portion apparente OAMB.



Dans le premier cas l'aire sera représentée par $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}\, r^2\, d\theta$, et dans le deuxième: $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}\, r^2 d\theta - \int_{\theta_1}^{\theta'} \frac{1}{2}\, r^2 d\theta$

En posant $AOX = \theta_1$, $BOX = \theta'$ et $\theta_2 = \theta' + 2\pi$.

L'intégrale définie est d'ailleurs facile à trouver dans les deux cas, car $\frac{1}{2}\int r^2 d\theta = \frac{1}{6}\, a^2 \int 3\,\theta^2 . d\theta = \frac{a^2 . \theta^3}{6} + C$

Donc: $\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2}\, r^2 d\theta = \frac{a^2}{6}\left(\theta_2^3 - \theta_1^3\right)$

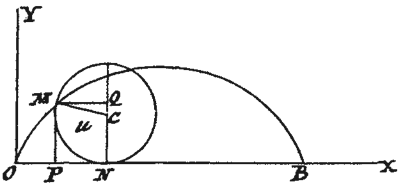
Prenons la spirale logarithmique $r = a^\theta$ et cherchons si en supposant $a < 1$, l'aire reste finie, θ variant de 0 à ∞, nous avons:

$$\int_0^\theta \frac{1}{2}\, r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\theta a^{2\theta} d\theta = \frac{1}{4}\int_0^\theta a^{2\theta} . d(2\theta) = \frac{1}{4 \log . a} . \left(a^{2\theta} - 1\right)$$

En passant à la limite $a^{2\theta}$ tend vers 0, et nous avons pour limite de l'aire: $-\frac{1}{4 \log . a} = \frac{1}{4 \log . \left(\frac{1}{a}\right)}$.

Cycloïde.

Pour avoir une portion d'aire quelconque il suffit de connaître $\int y\,dx$, or en désignant par u l'angle MCN on a :



$$x = ru - r\sin.u$$
$$y = r - r\cos.u$$

En prenant u pour variable indépendante, il vient :

$$dx = r(1-\cos.u)\,du, \quad \text{donc : } \int y\,dx = \int r^2(1-\cos.u)^2\,du$$

et par conséquent :

$$\int_{x_1}^{x_2} y\,dx = \int_{u_1}^{u_2} r^2(1-\cos.u)^2.\,du.$$

u_1 et u_2 correspondant à x_1 et x_2 ; car u croit avec x.

Pour résoudre le problème général, on est donc ramené à trouver :

$$\int r^2(1-\cos u)^2 du = \int r^2(1-2\cos.u+\cos^2 u)\,du = r^2\left[\int du - 2\int \cos u\,du + \int \cos^2 u\,du\right]$$

Or :

$$\int du = u, \int \cos.u\,du = \sin.u$$

$$\int \cos.^2 u\,du = \int \frac{1+\cos.2u}{2}\,du = \frac{u}{2} + \frac{\sin.2u}{4}.$$

ou encore :

$$\int \cos.^2 u\,du = \int \cos.u\,d\sin.u = \cos.u\sin.u + \int \sin.^2 u\,du$$

et en remplaçant $\sin.^2 u$ par $1-\cos.^2 u$

$$\int \cos.^2 u\,du = \cos.u\sin.u + \int du - \int \cos.^2 u\,du$$

$$\int \cos.^2 u\,du = \frac{\cos.u\sin.u}{2} + \frac{u}{2} = \frac{\sin.2u}{4} + \frac{u}{2}$$

Il suffira donc pour traiter le cas général de connaître u_1 et u_2.

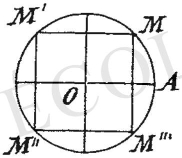
Considérons le cas particulier où les deux limites sont $x=0$, et $x=2\pi r$ et $u_1=0$, $u_2=2\pi$; c'est-à-dire cherchons la valeur de l'aire totale. Nous aurons en nous servant des résultats précédents

$$r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos.u+\cos.^2u)\,du = 3\pi r^2.$$

Ainsi l'aire totale est égale à trois fois l'aire du cercle rotateur.

On peut arriver à cette valeur, directement de la manière suivante :

$$r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos.u+\cos.^2u\,du) = r^2\int_0^{2\pi}du - 2r^2\int_0^{2\pi}\cos.u\,du + r^2\int_0^{2\pi}\cos.^2u\,du.$$



Remarquons que les arcs AM et AM''' ont un cosinus égal et de signe contraire à celui des arcs AM' et AM'' de sorte que tous les éléments de $\int_0^{2\pi}\cos.du$ se détruisent quatre à quatre et par suite cette intégrale est nulle. La figure montre encore que

$$\int_0^{2\pi}\cos.^2u\,du = \int_0^{2\pi}\sin.^2u\,du = \int_0^{2\pi}du - \int_0^{2\pi}\cos.^2u\,du.$$

Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos.^2u\,du = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}du = \pi.$

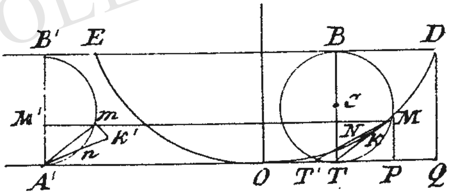
La formule donne par conséquent :

$$r^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos.u+\cos.^2u)\,du = r^2.2\pi + r^2.\pi = 3\pi r^2.$$

Nous donnerons de ce résultat deux démonstrations géométriques, en adoptant des modes de division différents de ceux que nous avons employés jusqu'ici en négligeant les infiniment petits du second ordre.

1ère. Démonstration.

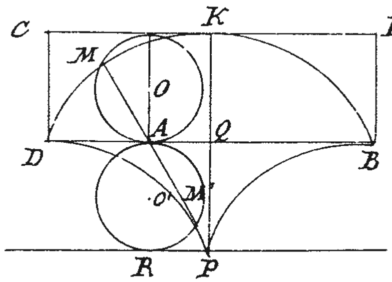
Transportons la demi circonférence BMT en B'mA', la tangente MT, viendra en A'm, et en menant A'n, parallèle à une tangente voisine NT', nous aurons $A'n = TN$. En prenant $nK' = NK$, nous aurions le triangle

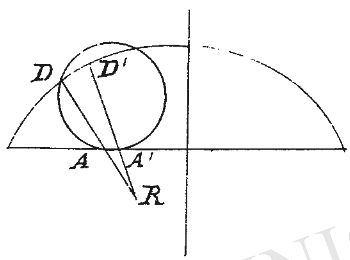


A'mK' égal à KTT', et la somme des triangles KTT' forme à la limite l'aire MTO, négligeons l'infiniment petit du 2e ordre mnK', et nous reconnaissons que cette aire MTO est égale à la portion de cercle A'nm, ajoutons de part et d'autre les triangles égaux MPT et A'M'm, il en résulte que aire MOP = aire A'M'm ; appliquons cela au point D, il vient aire DOQ = aire $A'mB' = \frac{1}{2}\pi r^2$.
L'aire de la cycloïde est égale à l'aire du rectangle EDQ, moins deux fois l'aire DOQ, ou bien

$$2\pi r \times 2r - \pi r^2 = 3\pi r^2$$

2ème. Démonstration.





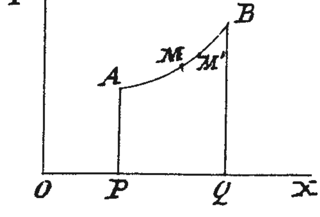
Remarquons d'abord que la normale MA, à la cycloïde DMB est tangente à la cycloïde DM'P et que AM' = AM; en effet arc RM' = RP = AQ, et puisque DQ est égal à une demi circonférence arc AM' = AD = arc AM, donc, la normale AM et la tangente AM' ne forment qu'une seule ligne droite et l'on a AM' = AM. Donc les intersections successives des normales à la première cycloïde, donneront les deux portions DP et PB de cycloïde.

Considérons deux normales voisines DC, D'C; il résulte de ce que nous venons de démontrer que l'aire du triangle CDD' égale quatre fois l'aire CAA', en passant à la limite aire DKBP = 4. aire DBP, ou bien aire DKB = 3 aire DPB. Donc aire DKB ou l'aire cherchée est les $\frac{3}{4}$ de l'aire du rectangle DBCE, qui est égale à $4\pi r^2$; sa valeur est donc $3\pi r^2$.

Rectification des courbes planes.

Soit à trouver la longueur de l'arc AB; prenons des axes rectangulaires OX, OY; et soit $y = f(x)$ l'équation de la courbe rapportée à ces axes.

En désignant l'arc AB par S; OP et OQ par x_1 et x_2, nous aurons:



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Donc $s = \int_{x_1}^{x_2} dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$

On peut encore arriver à ce résultat, en considérant deux points M et M' infiniment rapprochés; on peut en négligeant les infi-

-ment petits du 2^e ordre, confondre l'arc MM' avec la corde MM' qui est égale à $\sqrt{dx^2+dy^2}$; et partageant l'arc AB en arcs tels que MM' et passant à la limite, l'erreur s'annulle, et la somme donne

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

L'expression devient en employant une variable indépendante t

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

t_1 et t_2 étant les valeurs correspondantes à x_1 et x_2

ω étant l'angle que nous prendrons pour variable indépendante et r le rayon vecteur, on a pour la différentielle d'un arc

$$ds = \sqrt{dr^2+r^2 d\omega^2} = d\omega \sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\omega}\right)^2}$$

$$\text{Donc } s = \int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2}$$

ω_1 et ω_2 étant les valeurs de ω correspondantes aux deux extrémités de l'arc.

Applications.

L'équation étant $r = a\omega$, on en conclut $\frac{dr}{d\omega} = a$; et l'expression de l'arc devient:

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \sqrt{a^2\omega^2+a^2} = a\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \sqrt{1+\omega^2}.$$

Avant de passer à l'évaluation de cette intégrale définie, je vais démontrer qu'elle représente aussi un arc de parabole; que par conséquent un arc de la spirale est toujours égal à un arc de parabole.

En effet la formule $\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, devient pour la parabole dont l'équation est $y = \frac{x^2}{2a}$, $\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}$.

Changeons de variable indépendante, et posons $x = a\omega$; en désignant par ω_1 et ω_2 les valeurs correspondantes à x_1 et x_2, nous aurons :

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} = a\int_{\omega_1}^{\omega_2} d\omega \sqrt{1+\omega^2}$$

égalité qui démontre la proposition énoncée.

Pour arriver à l'évaluation de l'intégrale définie il suffit de connaître $\int d\omega \sqrt{1+\omega^2}$. Or :

$$\int d\omega \sqrt{1+\omega^2} = \int \frac{d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} + \int \frac{\omega^2 . d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} = \log.(\omega + \sqrt{1+\omega^2}) + \int \omega . \frac{\omega d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}}.$$

Et $\int \omega \frac{\omega d\omega}{\sqrt{1+\omega^2}} = \omega\sqrt{1+\omega^2} - \int \sqrt{1+\omega^2} . d\omega$.

Donc en substituant :

$$\int d\omega \sqrt{1+\omega^2} = \frac{\omega\sqrt{1+\omega^2}}{2} + \frac{1}{2}\log.(\omega + \sqrt{1+\omega^2}).$$

On peut donc à l'aide des logarithmes rectifier un arc de spirale c'est ramener la rectification de cet arc, à la quadrature de l'hyperbole ; car tout logarithme peut s'exprimer par une aire d'hyperbole.

Considérons en effet l'hyperbole équilatère dont l'équation est $y = \frac{1}{x}$, il en résulte $\int y\, dx = \log x + C$.

d'où $\int_1^x y\, dx = \log . x$.

Tous les logarithmes pourront donc s'exprimer par des

aires de cette hyperbole.

Partons de l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, et introduisons la variable indépendante t, en posant $\frac{x}{a}=\sin.t$, $\frac{y}{b}=\cos.t$.

Il en résulte: $dx=a\cos.t.dt$, $dy=-b\sin.t.dt$ et $ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{a^2\cos.^2t+b^2\sin.^2t}.dt=dt\sqrt{a^2-(a^2-b^2)\sin.^2t}$ et en posant $a^2-b^2=c^2$

$$ds=dt\sqrt{a^2-c^2\sin.^2t}.$$

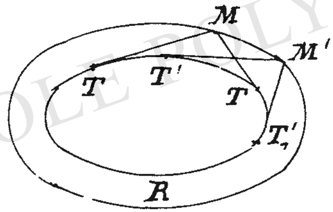
Pour pouvoir évaluer la longueur d'un arc, il faudrait connaître $\int dt\sqrt{a^2-c^2\sin.^2t}$; or l'intégration en est impossible; c'est une transcendante nouvelle qui prend le nom d'intégrale elliptique.

Une intégrale $\int f(x)dx$ est dite elliptique, lorsque $f(x)$ contient un radical carré, ou bien un polynome du 3^e ou 4^e degré. L'intégration est ordinairement impossible. Au delà, elle prend le nom d'intégrale ultra-elliptique.

Les intégrales elliptiques se réduisent à trois classes qu'on peut ramener aux trois intégrales suivantes:

$$\int\frac{dt}{\sqrt{1-c^2\sin^2t}},\ \int dt\sqrt{1-c^2\sin.^2t},\ \int\frac{dt}{(1+m\sin.^2t)\sqrt{1-c^2\sin.^2t}}.$$

Bien que les arcs d'ellipse ne soient pas rectifiables, on peut cependant assigner deux arcs d'une infinité de manières dont la différence soit rectifiable géométriquement.



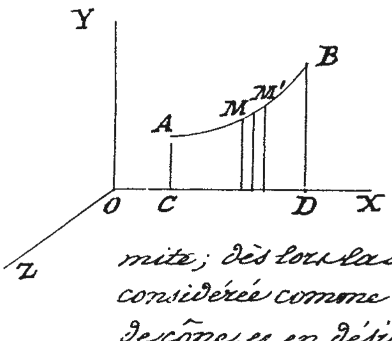
Il suffit en effet de considérer deux ellipses homofocales. Si d'un point M, de l'enveloppante on mène à l'enveloppée les deux tangentes MT, MT', on a d'après le théorème de Chasles, déjà énoncé, $MT + MT' + TRT' = cons.$; si donc on mène d'un point M', deux autres tangentes, $M'T_1$ et $M'T_1'$; la différence entre les deux arcs TRT', T_1RT_1', sera égale à la différence entre deux sommes de tangentes et pourra par conséquent s'obtenir géométriquement.

On a un résultat analogue en remarquant que aussi $MT + MT' - TT_1T' = constante$.

Evaluation des surfaces et des volumes.

Considérons d'abord la surface et le volume engendrés par une courbe tournant autour d'un axe.

Soit OX l'axe et AB la courbe que je supposerai plane et dans un même plan avec OX.

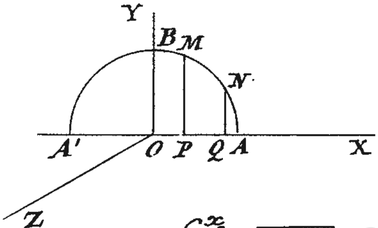


Je considère deux points M et M' infiniment rapprochés; je puis confondre la corde MM' avec l'arc MM', l'erreur s'annulle à la limite; dès lors la surface engendrée par MM' peut être considérée comme la surface engendrée par un tronc de cône, et en désignant par x, y, les coordonnées du milieu de MM', et par ds la corde MM', cette surface est égale à $2\pi y . ds$.

La surface totale sera égale à $2\pi\int y.ds$, les limites de l'intégrale définie dépendant de la variable. Si on prend x pour variable indépendante,

$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, et en posant $OC = x_1$, $OD = x_2$, la surface engendrée sera égale à $2\pi\int_{x_1}^{x_2} y.\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$.

Soit $A'BA$ le demi cercle et OX l'axe nous aurons pour la surface engendrée par un arc MN, en appliquant la formule précédente et remarquant que $y = \sqrt{R^2-x^2}$ et par conséquent



$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$2\pi\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{R^2-x^2}.dx.\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}} = 2\pi R\int_{x_1}^{x_2}dx = 2\pi R(x_2-x_1)$$

et en désignant $x_2 - x_1$ par h, on retrouve la formule de géométrie $2\pi R h$.

Revenons à l'arc MM', on pourra toujours supposer que de M à M' l'arc aille en augmentant ou en diminuant; il suffira de les prendre suffisamment rapprochés; il en résulte qu'en désignant par y l'ordonnée de M, $y+\Delta y$ celle de M', le volume engendré par l'arc sera compris entre les deux cylindres: $\pi y^2.dx$, et $\pi(y+\Delta y)^2 dx$. Or Δy étant un infiniment petit du 1er ordre et dx également, ces deux cylindres ne diffèrent que par un infiniment petit du second ordre, et nous pourons prendre $\pi y^2 dx$ pour le volume engendré par MM'.

Par conséquent le volume engendré par l'arc total AB, sera :

$$\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx.$$

Reprenons l'arc MN ; nous avons $y=\sqrt{R^2-x^2}$, et la formule devient :

$$\pi\int_{x_1}^{x_2}(R^2-x^2)\,dx=\pi R^2(x_2-x_1)-\frac{\pi}{3}\left(x_2^3-x_1^{\,2}\right).$$

On pourrait en conclure le théorème que donne la géométrie ; appliquons la au cas de la demi-sphère et pour cela faisons $x_1=0$, $x_2=R$, nous trouverons :

$$\pi R^3-\frac{1}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

Si la courbe est une ellipse, on remplacera y par $m\sqrt{a^2-x^2}$; et dans les calculs précédents on mettra m^2 en facteur commun.

Volume des corps quelconques.

Menons une série de plans parallèles au plan des xy, et infiniment rapprochés ; nous pourrons considérer le volume comme partagé en cylindres, car la différence infiniment petite s'annullera à la limite.

En désignant par λ, une direction quelconque et dz la hauteur correspondante ; $\lambda\,dz$, sera le volume du cylindre qu'on peut encore considérer comme la limite d'un prisme, de sorte que si z_1 et z_2 sont les deux ordonnées extrêmes $\int_{z_1}^{z}\lambda\,dz$, représentera le volume cherché ; seulement on devra trouver par λ une intégration préalable ; il en résulte que cette recherche du vo-

-lume renferme implicitement une intégration double.

Prenons l'équation de l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

En faisant z = constante, l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}$, de la projection l'est aussi de la section, puisqu'elle se projette en véritable grandeur. Les deux axes sont :

$a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$, $b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}$

l'aire de la section est donc : $\pi ab.\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)=\lambda.$

Nous avons donc pour l'expression du volume :

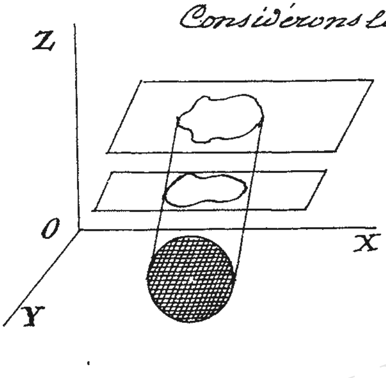
$$V=\int_{-c}^{+c}\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)dz=\pi ab\left[2c-\frac{2}{3}c\right]=\frac{4}{3}\pi a.b.c.$$

On obtient en posant $abc=R^3$, $V=\frac{4}{3}\pi R^3.$

Ainsi le volume d'une ellipsoïde est égal au volume d'une sphère dont le cube du rayon est égal au produit des trois axes.

On peut rendre explicite l'intégrale double ; il suffit de diviser le volume en parties dont deux dimensions soient infiniment petites.

Considérons le volume compris entre deux plans horizontaux et un cylindre droit ; (nous supposerons les axes rectangulaires ; s'ils étaient obliques, on prendrait la génératrice parallèle à l'axe des z) à la mesure duquel on pourra ramener la mesure des autres volumes.



Décomposons le d'abord par des

plans parallèles au plan des ZY, et ensuite par des plans parallèles au plan des ZX, en parallélipipèdes dont les bases seront infiniment petites. Nous aurons en considérant l'un quelconque de ces parallélipipèdes, par son volume $(Z-z)\,dx.dy$; Z et z étant les ordonnées des plans horizontaux; dx et dy les distances des plans comptées sur l'axe des x et sur l'axe des y.

Dans une même tranche parallèle à l'axe des ZY, dx sera constante, dy sera seule variable et le volume de cette tranche sera:

$\int_{y_1}^{y_2}(Z-z)\,dx\,dy$ ou $dx\int_{y_1}^{y_2}(Z-z)\,dy$, y_1 et y_2 étant les deux ordonnées extrêmes.

En faisant la somme de toutes ces tranches, nous aurons pour le volume total:

$$V=\int_a^b dx\int_{y_1}^{y_2}(Z-z)\,dy$$

a et b étant les deux abscisses extrêmes.

On aurait pu changer l'ordre des tranches, et on aurait eu:

$$V=\int_\alpha^\beta dy\int_{x_1}^{x_2}(Z-z)\,dx,$$ α et β les deux ordonnées extrêmes.

CALCUL INTÉGRAL

2ème année

1848-1849

Calcul Intégral

2ème année

1848–1849.

Dans le cours de première année on a appris à intégrer quelques différentielles, on peut avoir à résoudre la question inverse c'est-à-dire à différentier une intégrale par rapport à un paramètre quelconque indépendant de la variable contenu dans la fonction sous le signe $\int$ en supposant que l'on ne connaisse pas préalablement l'expression de cette intégrale.

Supposons donc que nous voulions déterminer la différentielle de $\int\varphi(x,\alpha)\,dx$ par rapport à α

Nous distinguerons trois cas:

Dans le 1er. on laisse les limites de l'intégrale tout à fait indéterminées c'est-à-dire que l'on cherche

$$\frac{d}{d\alpha}\int\varphi(x\alpha)\,dx.$$

Il suffit alors d'appliquer la définition même de la dérivée car en se rappelant que ce n'est autre chose que la limite du rapport entre l'accroissement de la fonction et l'accroissement de la variable, on aura évidemment:

$$\frac{d}{d\alpha}\int\varphi(x,\alpha)\,dx = \lim.\ \frac{\int\varphi(x\alpha+d\alpha)\,dx - \int\varphi(x,\alpha)\,dx}{d\alpha}$$

Comme d'ailleurs la différence de deux intégrales est égale à l'intégrale de la différence on aura:

$$\frac{d}{d\alpha}\int\varphi(x,\alpha)\,dx = \lim. \frac{\int[\varphi(x,\alpha+d\alpha)-\varphi(x,\alpha)]\,dx}{d\alpha}$$

et que l'intégrale est prise par rapport à la variable x $d\alpha$ sera une constante que l'on pourra faire passer sous le signe $\int . dx$.

Soit qu'il viendra $\frac{d}{d\alpha}\int\varphi(x,\alpha)\,dx = \lim\int\frac{[\varphi(x,\alpha+d\alpha)-\varphi(x,\alpha)]}{d\alpha}\,dx$

Si maintenant on passe à la limite, en se rappelant la définition de la dérivée ci-dessus, on aura enfin :

$$\frac{d}{d\alpha}\int\varphi(x,\alpha)\,dx = \int\frac{d\varphi}{d\alpha}\,dx.$$

De sorte que l'on voit que pour prendre la différentielle d'une intégrale par rapport à un paramètre qui entre dans la fonction sous le signe $\int$ il suffit de prendre la différentielle de cette même fonction par rapport à ce paramètre et de prendre l'intégrale de cette différentielle.

C'est cette règle pratique qui a fait donner à cette opération différentiation sous le signe $\int$

Dans le deuxième cas on suppose que les limites de l'intégrale sont déterminées mais qu'elles sont constantes.

Il est facile de voir qu'alors le raisonnement sera identique au précédent, et qu'il suffira de remplacer le signe $\int$ par $\int_a^b$ car la démonstration laissait les limites de l'intégrale indéterminées, en exigeant toutefois qu'elle soit indépendante de x.

Enfin dans le 3^e cas, on se propose de déterminer la différentielle par rapport à α de $u=\int^b\varphi(x,\alpha)\,dx$ expression dans laquelle a et b sont des fonctions de α.

On a évidemment la différentielle totale de u.

$$du = \frac{du}{db}db + \frac{du}{da}da + \frac{du}{d\alpha}d\alpha.$$

expression dans laquelle on suppose que $\frac{du}{db}$ est la différentielle de u en supposant que seulement avec α; la même remarque ayant encore lieu pour $\frac{du}{da}$ et $\frac{du}{d\alpha}$.

Or, d'après cette hypothèse $\frac{du}{d\alpha}$ n'est autre chose que l'expression que nous avons appris à calculer dans le deuxième cas de sorte que nous aurons : $\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\varphi}{d\alpha}dx$.

De plus, si l'on fait $\int \varphi(x,\alpha)\,dx = F(x,\alpha)$ on aura les deux relations suivantes : (1) $\frac{dF}{dx} = \varphi(x,\alpha)$

et (2) $u = \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx = F(b,\alpha) - F(a,\alpha)$.

La relation (2) donne alors très facilement $\frac{du}{db} = \frac{dF}{db}$ et $\frac{du}{da} = -\frac{dF}{da}$, si de plus on le rapporte à la relation (1) on aura :

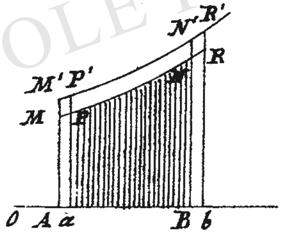
$$\frac{du}{db} = \frac{dF}{db} = \varphi(b,\alpha) \text{ et } \frac{du}{da} = -\frac{dF}{da} = -\varphi(a,\alpha).$$

Il suffit alors de reporter ces valeurs dans l'expression de du et l'on aura, en divisant par $d\alpha$

$$\frac{du}{d\alpha} = \varphi(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - \varphi(a,\alpha)\frac{du}{d\alpha} + \int_a^b \frac{d\varphi}{d\alpha}dx.$$

On peut se rendre géométriquement raison de cette expression.

En effet, l'intégrale définie $\int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx$ peut être considérée comme l'expression de l'aire de la courbe



MN dont l'équation est $\varphi(x, \alpha)$ entre les coordonnées correspondant aux abscisses $OA = a$, $OB = b$, si donc on peut déterminer la nouvelle courbe obtenue en faisant simultanément varier α, a et b, la différence des aires de ces courbes donnera la différentielle cherchée.

Or, si l'on fait d'abord varier α, également différentiele et l'on aura une courbe telle que M'N' infiniment peu différente de MN; et a et b variant de Aa et Bb, la nouvelle aire sera: P'abR' et la différentielle cherchée sera égale à aire MNBA - aire P'abR'. La considération de la figure montre qu'en supprimant la partie commune PNBa on a:

$$du = MNBA - P'abR' = M'MNN' + NBbR - MAaP.$$

Or, chaque élément différentiel NRR'N' est égal à NN' ou $d\varphi$ multiplié par NR ou dx, de sorte que la surface entre les abscisses considérées sera $\int_a^b d\varphi\, dx$; de même le rectangle curviligne MPAa et NBbR sont évidemment égaux à $\varphi(a,\alpha)\, da$ et $\varphi(b,\alpha)\, db$, de sorte que l'on aura enfin en substituant ces valeurs et divisant par $d\alpha$.

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\varphi}{d\alpha} dx + \varphi(b,\alpha)\frac{db}{d\alpha} - \varphi(a,\alpha)\frac{da}{d\alpha}.$$

Il est vrai que l'on néglige les différences des aires MPP'M' et N'NRR', mais chacune de leurs dimensions étant un infiniment petit du 1er ordre, ce sont des infiniment petits du 2e ordre dont on peut ne pas tenir compte.

On peut au moyen de la règle de différentiation démontrer la relation :

$$\int_{y_0}^{y_1} dy \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x,y)\, dx = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} \varphi(x,y)\, dy.$$

Pour faire voir qu'il y a égalité entre ces deux intégrales doubles, il faut d'abord prouver que leurs dérivées sont égales, puis démontrer qu'elles ont une valeur commune.

Or, si l'on différentie les deux membres de cette relation par rapport à y, le premier membre devient $\int_{x_0}^{x_1} \varphi(x,y)\, dx$ et le second d'après la règle de la différentiation sous le signe $\int = \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\int_{y_0}^{y_1} \varphi(x,y)\, dy}{dy} dx = \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x,y)\, dx$

Enfin, elles ont une valeur commune car elles s'annullent toutes deux pour $y = y_0$ car le premier membre a pour symbole $\int_{y_0}^{y_1}$ pour $y = y_0$; de même dans le 2d l'élément différentiel a le même symbole, il s'annulle donc aussi pour cette valeur et l'intégrale double est encore nulle.

Ces deux intégrales seront donc égales, car ayant leurs différentielles égales elles ne pourraient différer que par une constante, et puisqu'elles ont une valeur commune pour une même valeur d'une des variables, cette constante doit être la même dans les deux cas.

Il y a une exception à cette règle, c'est dans le cas où l'une des valeurs de l'élément différentiel de l'intégrale double devient infini entre les limites de ces intégrales ; cela tient à ce qu'alors le raisonnement fait pour établir la règle de la différentiation sous le signe $\int$ n'est plus

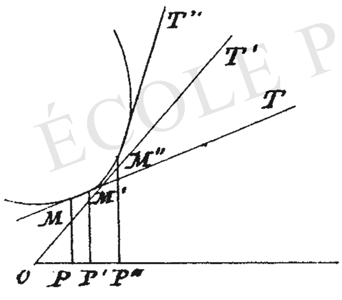
applicable.

Intégration des équations différentielles ordinaires.

On appelle équations différentielles du premier ordre, une relation telle que $f(x,y,p)=0$ dans laquelle il n'entre que la dérivée du premier ordre.

De cette relation on peut imaginer que l'on ait tiré $p=f(x,y)$. Or, si l'on admet qu'il existe une relation entre x et y qui satisfait à cette équation différentielle, on peut prouver qu'elle ne représente pas une courbe unique.

En effet, prenons une abscisse quelconque $OP=x_0$ et



déterminons le point M au moyen d'une ordonnée arbitraire y_0. La relation différentielle donnera $p_0=f(x_0,y_0)$ nous aurons donc l'inclinaison de la tangente à la courbe en ce point et nous pourrons construire cette droite MT. Cela posé, si nous faisons varier x, c'est-à-dire, si nous posons $x_1=x_0+dx_0$, on aura y_1 au moyen de la relation $y_1=y_0+dy_0=y_0+p_0\,dx_0$. Ayant déterminé le point M' dans les coordonnées pour (x,y) on aura encore de la même manière $p_1=f(x_1,y_1)$ et par suite la tangente M'T'. Le point M'' se déduira du point M' de la même manière que celui-ci sera déduit du point M et l'on voit que l'on pourra continuer les différentes tangentes dans les intersections successives

déterminerons à la limite la courbe cherchée.

On peut dire que si pour chaque valeur détérminée de x on prend une valeur arbitraire de y on aura une courbe parfaitement déterminée; par conséquent la relation entre x et y qui satisfait à l'équation différentielle donnée doit être de la forme $\varphi(x,y,c)=0$ (c étant une constante arbitraire) puisqu'elle doit être telle que pour chaque valeur déterminée de x on puisse prendre une valeur arbitraire de y.

Cette relation $\varphi(x,y,c)=0$ s'appelle l'intégrale générale de l'équation différentielle; on verra plus tard qu'il existe encore d'autres relations entre x et y satisfaisant à la proposée; ces relations sont dites intégrales singulières ou valeurs particulières.

On peut se demander comment on définira que l'intégrale générale $\varphi(x,y,c)=0$ (1) satisfait à la proposée $f(x,y,p)=0$ (2).

Pour cela on différentie l'intégrale générale on a $\frac{d\varphi}{dx}+\frac{d\varphi}{dy}p=0$ (3), cette dernière relation contient encore c, il faut donc éliminer cette constante entre (1) et (3) et l'on aura une relation entre x, y, p qui devra donner la même valeur de p que la proposée.

Si l'intégrale générale avait été résolue par rapport à c de telle manière que l'on ait $c=\varphi(x,y)$ la différentiation éliminerait c immédiatement, et il ne resterait plus qu'à égaler comme précédemment les deux valeurs de p pour avoir une identité

On peut remarquer que ce résultat s'applique encore évidemment aux cas des solutions particulières,

car elles peuvent être représentées par $\varphi(x,y)=0$.

Exemple — Nous allons développer une application qui donnera un exemple d'intégrale générale et de solutions particulières.

Soit l'équation différentielle : $dy\sqrt{x^2+y^2-a^2}-xdx-ydy=0$ en divisant par le radical, il vient :

$dy-\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}}=0$ ou $d\left(y-\sqrt{x^2+y^2-a^2}\right)=0$ en intégrant on aura immédiatement : $y-\sqrt{x^2+y^2-a^2}=C$

En chassant le radical, élevant au carré et réduisant il vient : $x^2+2cy-a^2-c^2=0$.

En appliquant la règle exposée précédemment on vérifiera facilement que cette intégrale générale satisfait à la proposée.

Enfin, on peut voir par la substitution que $\sqrt{x^2+y^2-a^2}=0$ satisfait la proposée. De plus, ce sera évidemment une solution particulière, car l'intégrale générale exprime une suite de paraboles, et cette relation est l'équation d'un cercle.

On a vu que lorsqu'on considère une expression de la forme $fx\,dx$ il existe toujours une fonction dont elle peut être la différentielle : on peut se demander si dans le cas de deux ou de plusieurs variables indépendantes une expression de la forme $Mdx+Ndy$ peut toujours être considérée comme la différentielle exacte de x et de y, ou sinon quelles doivent être les conditions pour que cela ait lieu. Cette question constitue ce que l'on appelle <u>recherche des conditions d'intégrabilité des équations différentielles du 1^er^ ordre entre plusieurs variables indépendantes</u>.

Supposons d'abord que l'on ait l'expression $Mdx + Ndy$ à deux variables indépendantes et cherchons quelles sont les conditions pour qu'elle puisse être la différentielle totale d'une certaine fonction de x et de y. En supposant connue cette fonction et la désignant par u, on devra avoir : $M = \frac{du}{dx}$, $N = \frac{du}{dy}$; or on sait qu'il doit exister la relation $\frac{d.\frac{du}{dx}}{dy} = \frac{d.\frac{du}{dy}}{dx}$ donc il existera entre M et N la relation $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, qui n'est autre chose qu'une identité.

De plus, cette condition sera suffisante, car en admettant son existence on pourra construire une fonction u telle que sa différentielle totale soit $Mdx + Ndy$.

En effet, si nous effectuons $\int Mdx$ nous reproduirons d'abord tous les termes de u qui contiennent x car lorsque, u étant supposé connu, on forme M, c'est-à-dire, $\frac{du}{dx}$ on a pris tous les termes de u qui renfermaient x par conséquent si l'on multiplie par dx et qu'on fasse $\int Mdx$ on devra reproduire tous les termes de u qui renferment x.

Si de plus, nous ajoutons à ce premier terme ainsi déterminé $\int N_y\, dy$ dans lequel N_y indique l'ensemble de tous les termes de N qui ne contiennent pas x on reproduira ainsi les termes de u qui renferment y sans contenir x, car de même que précédemment, en formant N on a pris tous les termes de u qui renferment y et on a formé leur dérivées, si donc on ne prend que N_y on n'aura que l'ensemble des dérivées des termes de u qui contiennent y sans contenir x et en formant $\int N_y\, dy$ on

reproduira l'ensemble de ces termes eux-mêmes.

Comme d'ailleurs il peut y avoir des constantes, l'expression de cette fonction parfaitement déterminée sera alors :

$$u = \int M dx + \int N_y dy + C.$$

Nous avons ainsi formé une fonction qui satisfera à l'équation différentielle donnée, pourvu toutefois que l'on tienne compte de la relation de condition que l'on suppose exister. Pour le faire voir il suffit de former $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ et de montrer qu'ils sont respectivement égales à M et N.

Or, $\frac{du}{dx}$ est évidemment égale à M car $\int N_y dy$ et C sont indépendants de x. De plus, $\frac{du}{dy} = \int \frac{dM}{dy} dx + N_y$ et comme d'après la relation de condition $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ il viendra : $\frac{du}{dy} = \int \frac{dN}{dx} dx + N_y$; maintenant $\int \frac{dN}{dx} dx$ ne sera pas $= N$ car en prenant $\frac{dN}{dx}$ on ne forme que les dérivées des termes de N qui contiennent x et en effectuant $\int \frac{dN}{dx} dx$ on ne reproduit que les termes de N qui contiennent x ; comme d'ailleurs N_y représente l'ensemble des termes de N qui ne contiennent pas x il s'ensuit que $\frac{du}{dx}$ sera égal à N ce qu'il s'agissait de démontrer.

On en conclut que la véritable condition d'intégrabilité sera $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ puisqu'elle est nécessaire et suffisante.

Examinons encore le cas où l'équation différentielle donnée est de la forme : $M dx + N dy + P dz$.

Pour que cette expression soit la différentielle exacte d'une fonction u de x, y, z il faudra encore que l'on ait : $M = \frac{du}{dx}$, $N = \frac{du}{dy}$, $P = \frac{du}{dz}$ et d'après le même principe que dans le cas de deux variables, il faudra que l'on ait les relations identiques $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$, $\frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}$, $\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$ toutes sont les équations de conditions qui sont nécessaires et que nous allons encore démontrer être suffisantes.

Je dis, que, si l'on construit une fonction u telle qu'e l'on ait $u = \int M dx + \int N_{yz} dy + \int P_z dz + C$ dans laquelle N_{yz} indique l'ensemble des termes de N qui ne contiennent pas x et P_z, l'ensemble des termes de P qui ne contiennent ni x ni y et C une constante, les trois relations établies précédemment suffiront pour que l'équation différentielle donnée soit la différentielle totale.

En effet, les mêmes raisonnements que dans le cas de deux variables montreront évidemment que $\frac{du}{dx} = M$ et $\frac{du}{dy} = N$ car les dérivées ne seront nullement altérées par le terme $\int P_z dz$ qui est indépendant de x et de y. Il reste donc seulement à prouver que $\frac{du}{dx} = P$.

$$\text{Or, } \frac{du}{dz} = \int \frac{dM}{dz} dx + \int \frac{dN_{yz}}{dz} dy + P_z.$$

La première intégrale se transforme au moyen de la deuxième relation de condition et devient $\int \frac{dP}{dx} dx$.

La troisième relation de condition servira aussi à transformer la deuxième intégrale en remarquant que

$\frac{dN_{yz}}{dz} = \frac{dP_{yz}}{dy}$ car N contient des termes qui renferment qui renferment x et des termes qui ne renferment pas x; lorsqu'on forme $\frac{dN}{dz}$ les termes qui renferment x conservent cette variable puisqu'elle est indépendante de z; de même pour P lorsqu'on formera $\frac{dP}{dy}$; or la relation $\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}$ est une identité, il devra donc y avoir égalité entre l'ensemble de termes contenant x dans les deux membres et par suite les parties de ces membres qui resteront $\frac{dN_{yz}}{dz}$ et $\frac{dP_{yz}}{dy}$ devront être égales.

Alors la valeur de $\frac{du}{dz}$ deviendra $\frac{du}{dz} = \int \frac{dP}{dx} dx + \int \frac{dP_{yz}}{dy} dy + P_z$

et d'après des considérations tout à fait identiques à celles employées dans le cas de deux variables on verra que $\int \frac{dP}{dx} dx$ donne l'ensemble des termes de P qui contiennent x, et que $\int \frac{dP_{yz}}{dy} dy$ donne l'ensemble des termes qui ne contiennent pas y et comme d'ailleurs P_z exprime l'ensemble des termes qui ne contiennent ni x ni y on aura complètement P.

On remarquera que non seulement l'existence de cette fonction u est démontrée, mais encore qu'elle est connue car elle peut s'obtenir par de simples quadratures.

Appliquons ce résultat à deux exemples :

$$1^\circ.\ \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right) dx - \left(\frac{x}{x^2+y^2} - 1\right) dy.$$

On peut d'abord vérifier que la condition d'intégrabilité est satisfaite car $\frac{d\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)}{dy}=\frac{d\left(\frac{x}{x^2+y^2}-1\right)}{dx}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Cela posé, la fonction u dont l'existence se trouve alors démontrée sera :

$$u=\int\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx+\int dy+C,\text{ or }\int\frac{y\,dx}{x^2+y^2}=\int\frac{\frac{dx}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{y}\right)}{1+\frac{x^2}{y^2}}$$

$=\text{arc. tg.}\frac{x}{y}$ de sorte qu'on aura enfin :

$$u=\text{arc tg.}\frac{x}{y}-x+y+C.$$

2°. $zy\,dx+xz\,dy+yx\,dz$. Il est encore facile de vérifier que les conditions d'intégrabilité sont satisfaites.

Alors on aura : $u=\int zy\,dx+C$, car alors N_{yz} et P_z sont évidemment nuls. En intégrant, il vient $u=xyz+C$, résultat que l'on devait prévoir car l'équation différentielle donnée a bien la forme de la différentielle d'un produit.

Proposons-nous enfin de démontrer l'application de cette règle au cas d'une équation différentielle renfermant m variable indépendante.

Il suffira pour prouver que cette règle est générale de montrer que si elle a lieu pour le cas de $m-1$ variables indépendantes, elle aura lieu pour le cas de m.

Si donc elle a lieu pour le cas de $m-1$ variables indépendantes cela veut dire que la fonction u qui satisfait à cette condition sera de la forme :

$$u=\int M\,dx+\int N_{yz..s}\,dy+\int P_{z..s}\,dz+\cdots+\int S_s\,ds+C.$$

Cela posé, je dis que si $y=$ une nouvelle variable indépendante c'est-à-dire si l'équation différentielle donnée

est de la forme : $M\,dx + N\,dy + P\,dz + S\,ds + T\,dt$.
l'intégrale sera en tenant compte des $\frac{m(m-1)}{2}$ relations de condition données comme dans le cas de deux et trois variables :

$$U = \int M\,dx + \int N_{yz..st}\,dy + \int P_{z...st}\,dz + \dots + \int S_{st}\,ds + \int T_{t}\,dt + C.$$

En effet, il est d'abord évident que les dérivées de U par rapport aux $m-1$ premières variables seront encore $M, N \dots S$ car le dernier terme $\int T\,dt$ est indépendant de la variable et la lettre t que l'on ajoute aux indices des quantités sous le signe $\int$ n'influe en rien sur la nature du raisonnement supposé fait pour le cas des $m-1$ variables.

Il reste donc à prouver que $\frac{dU}{dt} = T$, or on a en différentiant :

$$\frac{dU}{dt} = \int \frac{dM}{dt}\,dx + \int \frac{dN_{yz..st}}{dt}\,dy + \int \frac{dP_{z..st}}{dt}\,dz + \dots + \int \frac{dS_{st}}{dt}\,ds + T_{t}.$$

Si maintenant on tient compte des relations de condition et que l'on remarque que des considérations en tout identiques à celles employées dans le cas de trois variables donnent $\frac{dN_{yz..st}}{dt} = \frac{dT_{yz...st}}{dy}$, on voit qu'il viendra :

$$\frac{dU}{dt} = \int \frac{dT}{dx}\,dx + \int \frac{dT_{yz..st}}{dy}\,dy + \dots + \int \frac{dT_{st}}{ds}\,ds + T_{t}.$$

Et les mêmes raisonnements montrent encore que l'on a la valeur complète de T car on a d'abord l'ensemble des termes qui contiennent x, ensuite l'ensemble des termes qui contiennent y sans contenir x, puis

l'ensemble du terme qui contient z sans contenir ni x ni y et ainsi de suite.

On a vu que l'équation différentielle du premier ordre pouvait se mettre sous la forme $p = f(x,y)$ or on peut $f(x,y) = -\dfrac{M}{N}$ de telle sorte que l'on aura

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \text{ d'où } M\,dx + N\,dy = 0.$$

Cela posé, passons à l'intégration de cette équation dans différents cas particuliers et d'abord considérons le cas où les variables se trouvent séparées.

Cas où elle est la différentielle exacte d'une fonction. Dans ce cas on aura $M\,dx + N\,dy = du = 0$. (u étant la fonction que nous avons appris à calculer par la règle exposée précédemment).

L'intégrale sera évidemment $u = C$, et il résulte nécessairement de ce que $du = 0$ qu'il n'y a pas de solutions particulières, car s'il y en avait elles seraient de la forme $\varphi(x,y) = 0$ et ne pourraient pas satisfaire à la condition d'avoir leurs différentielles nulles.

Cas où l'on a $M = f(x)$ et $N = \varphi(y)$. Alors les variables sont immédiatement séparées et l'on aura $\int M\,dx + \int N\,dy = C$.

Nous allons examiner actuellement le cas où les variables ne sont pas séparées. On se propose encore dans les différents cas d'effectuer cette séparation et l'on y arrive qu'en employant des artifices particuliers, soit en changeant de variable indépendante.

Exemple : 1°. $XY\,dx + X_1 Y_1\,dy = 0$ (X et X_1 indiquent des fonctions de x et Y et Y_1 des fonctions de y).

En mettant $X_1 Y$ en fonction il vient :

$$X_1 Y\left[\frac{X}{X_1}dx + \frac{Y}{Y_1}dy\right] = 0 ;$$

dans la quantité entre parenthèses les variables sont séparées et l'on a pour intégrale

$$\int \frac{X}{X_1}dx + \int \frac{Y}{Y_1}dy = C.$$

On voit facilement que les relations $X_1 = 0$ et $Y = 0$ satisfont encore à la proposée. Elles donnent des intégrales ou des solutions particulières selon qu'elles peuvent ou ne peuvent pas être déduites de l'intégrale générale.

2°. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ dans laquelle P et Q sont des facteurs de x. Cette équation est dite linéaire par rapport à y et du premier ordre parce qu'elle ne contient que les dérivées du premier ordre.

Cette équation peut toujours s'intégrer, c'est-à-dire qu'on peut toujours ramener son intégration à des quadratures.

Considérons d'abord le cas particulier de $Q = 0$ ou $\frac{dy}{dx} + Py = 0$, en divisant par y il vient $\frac{dy}{y} = -Pdx$, ou en intégrant $\log . y = -\int Pdx + \log . C_1$ (en mettant la constante sous la forme $\log . C_1$) on tire de là

$\log . \left(\frac{y}{C}\right) = -\int Pdx$ d'où enfin $y = C_1 e^{-\int Pdx}$.

Passons au cas général ; nous poserons $y = uz$ (u et z étant des fonctions dont on pourra disposer).

en substituant, il viendra : $u\frac{dz}{dx}+z\frac{du}{dx}+Puz=Q$ ou

$u\frac{dz}{dx}+z\left(\frac{du}{dx}+Pu\right)=Q$ si l'on prend u de telle manière que l'on ait : $\frac{du}{dx}+Pu=0$, on aura d'après le cas particulier

$u=e^{-\int Pdx}$; nous prenons la constante $C_1=1$, car il nous suffit d'avoir une valeur particulière de u satisfaisant à cette condition. Cela posé, il reste :

$$\frac{dz}{du}=\frac{Q}{u}=Qe^{+\int Pdx} \quad \text{d'où} \quad z=\int Qe^{\int Pdx}dx+C.$$

et enfin $y=uz=e^{-\int Pdz}\left[\int Qe^{\int Pdx}dx+C\right]$.

On peut d'ailleurs vérifier facilement que si l'on avait pris $u=C_1\,e^{-\int Pdx}$ on arriverait à une expression de même forme ne contenant qu'une constante arbitraire.

En effet, il en résulte $z=\frac{1}{C_1}\int Qe^{\int Pdx}dx+C$.

et par suite $y=C_1e^{-\int Pdx}\left[\frac{1}{C_1}\int Qe^{\int Pdx}dx+C\right]=e^{-\int Pdx}\left[\int Qe^{\int Pdx}dx+CC_1\right]$

expression semblable à la première en ce sens que C, C_1 ne présente qu'une constante arbitraire.

On sait intégrer l'équation linéaire du premier ordre en changeant de variables ; il existe un autre procédé pour arriver à cette intégrale. Ce procédé consiste à identifier le premier membre de l'équation à la différentielle d'un produit de la forme Vy dans lequel V est une fonction de x seulement.

Ainsi, l'équation proposée est $dy + Py\,dx = Q\,dx$. Si l'on remarque que $d(Vy) = V\,dy + y\,dV$ ou que
$\frac{1}{V}\,d(Vy) = dy + y\frac{dV}{V}$ on voit que l'on peut identifier ce second membre avec la proposée si l'on pose $\frac{dV}{V} = P\,dx$. Si cette condition donne évidemment $V = e^{\int P\,dx}$; de plus il en résulte $\frac{1}{V}\,d(Vy) = Q\,dx$, et en intégrant $Vy = \int QV\,dx + C$

la valeur de y sera déduite immédiatement et l'on a $y = \frac{1}{V}.\left(\int QV\,dx + C\right)$. Remplaçant enfin V par sa valeur déterminée précédemment, on trouvera la valeur déjà connue de y :

$$y = e^{-\int P\,dx}\left[\int Q e^{\int P\,dx}\,dx + C\right]$$

On remarque qu'il a suffi de multiplier le premier membre de l'équation proposée par le facteur $V = e^{\int P\,dx}$ pour le rendre une différentielle exacte. Ce résultat se vérifierait d'ailleurs très facilement par les procédés connus.

L'intégration de cette équation différentielle linéaire du premier ordre, donnera immédiatement la résolution des équations différentielles qui peuvent se ramener à cette forme.

Ainsi l'équation $\frac{dy}{dx} + Py = Qy^{u}$ (équation de Bernouilli) se ramène facilement à la forme précédente en posant : $\frac{y^{1-u}}{1-u} = z$.

Car si l'on divise la proposée par y^{n} elle devient :

$y^{-n}\frac{dy}{dx}+Py^{1-n}=Q$: or $d\left(\frac{y^{1-n}}{1-n}\right)=\frac{(1-n)y^{-n}dy}{1-n}=y^{-n}dy=dz$.

Si donc on substitue il viendra.

$\frac{dz}{dx}+P(1-n)z=Q$ Relation qui est linéaire et du premier ordre.

La méthode serait en défaut dans le cas de $n=1$, mais l'inspection seule indique que l'équation prend la forme : $\frac{dy}{dx}+(P-Q)y=0$ qui n'est autre chose qu'un cas particulier de l'équation linéaire.

La résolution de l'équation : $\frac{dy}{dx}+Py+Qy^2=R$ dans laquelle P, Q, R sont des fonctions seulement se ramène à celle de l'équation de Bernouilli lorsque on connait une intégrale particulière η de la question.

En effet posons : $y=z+\eta$ en substituant dans la proposée il viendra :

$$\frac{dz}{dx}+\frac{d\eta}{dx}+Pz+P\eta+2Qz\eta+Q\eta^2+Qz^2=R$$

ou $\left\{\begin{array}{l}\frac{d\eta}{dx}+P\eta+Q\eta^2\\+\frac{dz}{dx}+(P+2Q\eta)z+Qz^2\end{array}\right\}=R$, or par hypothèse on a

$\frac{d\eta}{dx}+P\eta+Q\eta^2=R$, la résolution de l'équation se trouvera donc ramenée à celle de $\frac{dz}{dx}+(P+2Q\eta)z+Qz^2=0$.

Enfin, une autre classe d'équation de la forme $\frac{dy}{dx}+P\cos.y+Q\sin y=R$ se ramène à celle de Bernouilli.

Il suffit de poser $z = tg.\frac{1}{2}y$ (On prend $\frac{1}{2}y$ afin d'éviter les quantités irrationnelles. On en déduira facilement $\frac{1}{2}dy = \frac{dz}{1+z^2}$, $\cos. y = \frac{1-z^2}{1+z^2}$ et $\sin. y = \frac{2z}{1+z^2}$ en substituant il vient :

$$2\frac{dz}{dx} + P(1-z^2) + 2Qz = R(1+z^2)$$ ou enfin :

On dit que l'équation $Mdx + Ndy = 0$ est homogène lorsque M et N sont des fonctions homogène de x et de y.

L'intégration de cette équation s'effectue très simplement au moyen d'un changement de variables.

En effet dire que M et N sont des fonctions homogènes de x et de y c'est dire qu'ils sont de la forme :
$M = x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, $N = x^m\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ de sorte que la proposée deviendra en substituant : $x^m\left(\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy\right] = 0$, en multipliant par $\frac{1}{x^m}$ il vient : $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)dx + \psi\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$.

Si maintenant on pose $\frac{y}{x} = z$ d'où $dy = xdz + zdx$ il viendra :

$\varphi z dx + \psi z(xdz + zdx) = 0$, ou $(\varphi(z) + z\psi z)dx + x\psi(z dz = 0)$.

Multipliant enfin par $\frac{1}{x(\varphi z + z\psi z)}$ les variables seront séparées et l'on aura : $\frac{dx}{x} + \frac{\psi z\, dz}{\varphi z + z\psi z} = 0$ qui sera alors une différentielle exacte.

On voit donc que pour rendre le premier membre de l'équation une différentielle exacte il a fallu multiplier d'abord par $\frac{1}{x^m}$ puis par $\frac{1}{x(\varphi z + z\psi z)}$ ou en somme par $\frac{1}{z^{m+1}(\varphi z + z\psi z)}$ de sorte que si l'on désigne par U la fonction

dont le premier membre est devenu la différentielle, on aura :

$$\frac{1}{x^{m+1}(\varphi z+z\psi z)}(M dx+N dy)=dU \text{ ou}$$

$$M dx+N dy=x^{m+1}(\varphi z+z\psi z)\, dU.$$

Or, $x^{m+1}(\varphi z+z\psi z)=x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right).x.+x^m\psi\left(\frac{y}{x}\right)y=Mx+Ny.$

desorte que l'on a : $M dx+N dy=(Mx+Ny)\,dU.$

On peut vérifier immédiatement que l'on a bien :

$\frac{M}{Mx+Ny}dx+\frac{N}{Mx+Ny}dy=dU$, c'est-à-dire que le premier membre est bien une différentielle exacte. Il suffit évidemment de prouver que l'on a :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)=\frac{d}{dy}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right).$$

Or, $\frac{d}{dy}\left(\frac{M}{Mx+Ny}\right)=(Mx+Ny)\frac{dM}{dy}-M\frac{d}{dy}(Mx+Ny)=y\left(N\frac{dM}{dy}-M\frac{dN}{dy}\right)-MN.$

On trouvera de même :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{N}{Mx+Ny}\right)=x\left(M\frac{dN}{dx}-N\frac{dM}{dx}\right)-MN$$

En les égalant et ordonnant par rapport à x et y on trouve :

$N\left[x\frac{dM}{dx}+y\frac{dM}{dy}\right]=M\left[x\frac{dN}{dx}+y\frac{dN}{dy}\right]$ ce qui est une identité,

car on a d'après la propriété fondamentale des fonctions homogènes :

$y\frac{dM}{dx}+x\frac{dM}{dy}=Mm$ et $x\frac{dN}{dx}+y\frac{dN}{dy}=Nm$ ce qui donne identiquement $NMm=MNm.$

Le résultat $M dx+N dy=(Mx+Ny)\,dU=0$ peut servir à déterminer l'intégrale cherchée.

En effet, on peut y satisfaire en posant ou $dU=0$ ou $Mx+Ny=0$. La première supposition donne $U=C$ c'est l'intégrale générale puisque c'est une relation entre x, y et une constante arbitraire qui satisfait à la proposée.

La deuxième hypothèse, donne une relation entre x, et y qui sera une intégrale ou une solution particulière selon qu'elle pourra ou ne pourra pas se déduire de l'intégrale générale.

Examinons, à cet effet, comment on pourra en général reconnaître qu'une relation entre x et y qui satisfait à une équation différentielle donnée est une intégrale ou une solution particulière.

Soit, $F(x,y,p)=0$, cette équation différentielle et $\varphi(x,y,C)=0$ son intégrale générale supposée déterminée, soit enfin $\psi(x,y)=0$ la relation entre x et y qui satisfait à l'équation différentielle donnée. Si c'est une intégrale particulière elle pourra se déduire de l'intégrale générale en donnant à C une certaine valeur de sorte que la valeur de C tirée de la relation $\varphi(x,y,C)=\psi(x,y)$ devra être constante; si non ce sera une solution particulière.

On remarquera que dans les deux hypothèses que nous avons examinées successivement, nous avons supposé ou $dU=0$ ou $Mx+Ny=0$, il peut arriver que l'on ait simultanément $\begin{cases} dU=0 & (1) \\ Mx+Ny=0 & (2) \end{cases}$ alors la méthode précédente ne sera plus applicable car on a multiplié par $\dfrac{1}{Mx+Ny}$.

Dans ce cas particulier, l'équation se résoudra immédiatement; car de la relation (2) on tirera $M=-N\dfrac{y}{x}$; en substituant dans (1) on aura $xN(xdy-ydx)=0$, équation

qui peut être satisfaite, soit en posant : $xdy - ydx = 0$ ce qui donne $\frac{y}{x} = C$, soit encore en posant $N = 0$ ou $x = 0$. Or il est bien facile de voir que ces relations ne donnent pas de solutions particulières, car $N = 0$ pourra se résoudre par rapport à $\frac{y}{x}$ puisque c'est une fonction homogène et l'on en tirera une suite de valeurs $\frac{y}{x} = \alpha$, $\frac{y}{x} = \alpha'$; $\frac{y}{x} = \alpha''$ etc... qui peuvent évidemment se déduire de l'intégrale générale en attribuant à la constante C les différentes valeurs $\alpha, \alpha', \alpha''$.... Enfin la relation $x = 0$ se déduira encore pour la valeur $C = \infty$.

La classe des équations de la forme suivante se ramène aux équations homogènes.

Soit $(mx + ny + a)dx + (px + qy + b)dy = 0$, en posant

$\begin{cases} x = t + \alpha \\ y = u + \beta \end{cases}$ il viendra : $(mt + nu + m\alpha + n\beta + a)dx + (pt + qu + p\alpha + q\beta + b)dy$.

Si maintenant on pose $\begin{cases} m\alpha + n\beta + a = 0 \\ p\alpha + q\beta + b = 0 \end{cases}$, l'équation deviendra homogène et sera $(mt + nu)dx + (pt + qu)dy = 0$.

Il peut se présenter un cas d'exception, c'est celui où le dénominateur commun $(mp - ny)$ aux deux valeurs de α et de β tirées du système d'équation précédent serait donc b.

Il y a trois cas distincts qui peuvent satisfaire à la condition : $mp - ny = 0$.

1°. $\begin{cases} m = 0 \\ p = 0 \end{cases}$ l'équation devient $(ny + a)dx + (qy + b)dy = 0$ et les variables se trouvent immédiatement séparées.

2°. $\begin{cases} m = 0 \\ p = 0 \end{cases}$ on a alors : $adx + (px + qy + b)dy = 0$ et si l'on pose : $px + qy = z$ en observant que $pdx + qdy = dz$ il viendra :
$dx\left[a - \frac{p}{q}(z + b)\right] + \frac{z + b}{q}dz = 0$. Équation dans laquelle

les variables sont séparées.

3°. $mp = nq$. On en tire $n = \frac{mp}{q}$ et en substituant :
$\left[n(px+qy)+aq\right]dx + (px+qy+b)dy = 0$, en posant encore
$px+qy = z$, on trouve enfin :

$$(n+aq)\,dx + (z+b)(dz - p\,dx) = 0.$$

dans laquelle les variables sont encore séparées.

Dans les différentes équations dont nous avons jusqu'à présent déterminé les intégrales par la séparation des variables. Nous avons en même temps fait remarquer qu'il existait un facteur propre à rendre le premier membre de la proposée une différentielle exacte. Ce facteur porte le nom de facteur d'intégrabilité.

On peut remarquer toutes les fois qu'il a été possible de séparer les variables, qu'il existe un facteur d'intégrabilité.

En effet, soit l'équation différentielle proposée $Mdx+Ndy=0$
si les variables ne se trouvent pas immédiatement séparées, on exprimera x et y en fonction de nouvelles variables u et t et l'on aura une expression de la forme :
$\frac{1}{f(u,t)}\left[\varphi(u,t)\,du + \psi(u,t)\,dt\right] = 0$; en supposant que $\varphi(u,t)$ et $\psi(u,t)$ soient ce que deviennent M et N après le changement de variables.

Dans cette relation on suppose que la séparation des variables a été possible, cela veut dire que le premier membre a été rendu une différentielle exacte en u et t. Si maintenant on remet à la place de u et t leurs valeurs en x et y, ce sera encore évidemment une différentielle exacte en x et y et la relation établie précédemment deviendra : $\frac{1}{f(u,t)}\left[Mdx+Ndy\right] = dU = 0$.

Il en résulte nécessairement que $\frac{1}{f(u,t)}$ dans lequel

on suppose que les variables sont exprimées en fonctions de x et de y est un facteur d'intégrabilité de la proposée.

En admettant l'existence de l'intégrale générale de l'équation donnée et supposant encore qu'elle ait été résolue par rapport à p; on peut démontrer qu'il existe toujours un facteur d'intégrabilité.

L'équation différentielle donnée est:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M}{N} \quad \text{et} \quad F(x, y, C) = 0$$

son intégrale générale, on aura en différentiant:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = 0$$

d'où $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} = -\dfrac{M}{N}$. Dans cette relation $\dfrac{dF}{dx}$ et $\dfrac{dF}{dy}$ contiennent C, ce n'est pas une identité, mais c'est une équation équivalente à $F(x, y, C) = 0$ (1) et si l'on remplace C par sa valeur tirée de (1), on devra avoir une identité.

Dans cette hypothèse, on aura encore identiquement:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{M}{N} = \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}, \text{ d'où } \frac{M dx + N dy}{N} = \frac{\frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dx} dx}{\frac{dF}{dy}}.$$

et comme C est supposé remplacé dans (1) par sa valeur tirée de cette même équation on aura identiquement:

$$\frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy + \frac{dF}{dc} dc = 0, \text{ d'où } \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dy} dy = -\frac{dF}{dc} dc.$$

En substituant il viendra:

$$\frac{Mdx+Ndy}{N} = -\frac{\frac{dF}{dc}dc}{\frac{dF}{dy}} \quad \text{ou} \quad dc = \frac{\frac{dF}{dy}}{N\frac{dF}{dc}}(Mdx+Ndy).$$

On voit bien que $-\dfrac{\frac{dF}{dy}}{N\frac{dF}{dc}}$ est un facteur d'intégrabilité.

On peut observer que si y avait été pris pour variable indépendante, le facteur de l'intégrabilité $\dfrac{\frac{dF}{dx}}{N\frac{dF}{dc}}$ quoique de forme différente, aurait la même valeur, car en les égalant on a :

$$\frac{\frac{dF}{dy}}{N\frac{dF}{dc}} = \frac{\frac{dF}{dx}}{M\frac{dF}{dc}} \quad \text{d'où} \quad \frac{M}{N} = \frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$$

qui est une identité lorsque C a été remplacé par sa valeur tirée de (1).

On peut ajouter qu'il existe une infinité de facteurs d'intégrabilité.

Car on a vu qu'il existe un facteur p tel que l'on ait : $p(Mdx+Ndy) = du$ si l'on multiplie les deux membres par $\varphi(u)$, il viendra : $p\,\varphi(u)\,[Mdx+Ndy] = \varphi u\, du$.

Le deuxième membre est encore une différentielle exacte, de sorte que tous les facteurs de la forme $p\,\varphi(u)$ seront des facteurs d'Intégrabilité.

De plus on peut prouver que tous les facteurs d'intégrabilité seront de cette forme.

Supposons, en effet, que λ soit un autre facteur d'intégrabilité on aura les deux relations :

$\lambda M\,dx + \lambda N\,dy = dV$ et $\mu M\,dx + \mu N\,dy = du$, la première peut être mise sous la forme : $\frac{\lambda}{\mu}(M\mu\,dx + N\mu\,dy) = dV$ ou $\frac{\lambda}{\mu}\,du = dV$.

Cela posé, je dis que du moment qu'il existe entre u et V cette relation on a nécessairement $\frac{\lambda}{\mu} = \varphi(u)$. Pour le prouver il suffira de faire voir que lorsque u a une valeur constante $\frac{\lambda}{\mu}$ aura enfin une valeur constante et réciproquement. Or, la relation $dV = \frac{\lambda}{\mu}\,du$ donne en remplaçant du par sa valeur $dV = \frac{\lambda}{\mu}\frac{du}{dx}dx + \frac{\lambda}{\mu}\frac{du}{dy}dy$ et comme ce second membre est égal à une différentielle totale on devra avoir identiquement la condition d'intégrabilité :

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{\lambda}{\mu}\frac{du}{dx}\right] = \frac{d}{dx}\left[\frac{\lambda}{\mu}\frac{du}{dy}\right],$$ en développant, il vient :

$$\frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{d^2u}{dx\,dy} + \frac{du}{dx}\frac{d\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{dy} = \frac{\lambda}{\mu}\frac{d^2u}{dy\,dx} + \frac{du}{dy}\frac{d\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{dx}$$

ou en réduisant :

$$\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{dy} = \frac{du}{dy}\frac{d\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{dx}.$$

Or, par hypothèse on suppose $u = C$, d'où $\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy = 0$ et $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}}$. En substituant cette valeur, il vient :

$$-\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{dx}}{\frac{d\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{dy}}$$ d'où $$\frac{d\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{dx}dx + \frac{d\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)}{dy}dy = 0.$$

Relation qui indique bien que $\frac{\lambda}{\mu}$ a une valeur constante.

On voit bien d'ailleurs qu'en recommençant le même raisonnement seulement sous l'ordre inverse on démontrerait que etc. lorsque $\frac{\lambda}{\mu}$ est constant. On aura donc $\frac{\lambda}{\mu} = \varphi(u)$, d'où $\lambda = \mu\,\varphi(u)$. Ce qui prouve bien que tous les facteurs d'intégrabilité sont de la forme $\mu\,\varphi(u)$.

Il en résulte que lorsqu'on connaîtra deux facteurs d'Intégrabilité de la question, on pourra immédiatement déterminer l'intégrale générale, or, on a $\frac{\lambda}{\mu} = \varphi\, u$. et si l'on pose $\varphi(u) = C$, on en déduit $u = C$.

Appliquons ce résultat à l'équation $dy + Py\,dx = 0$. Les facteurs $\frac{1}{y}$ et $e^{\int P dx}$ sont des facteurs d'intégrabilité que nous avons déjà déterminés. L'intégrale générale se trouvera donc en posant $\dfrac{e^{\int P dx}}{\frac{1}{y}} = C$

d'où $y = C\,e^{-\int P dx}$

Si l'un des deux facteurs d'intégrabilité connu est constant, il suffira évidemment d'égaler l'autre à C.

De cette remarque on déduit une propriété remarquable des équations homogènes, c'est que dans le cas où elles satisfont à la condition d'intégrabilité, on peut obtenir leur intégrale générale sans quadratures, car dans ce cas on connait deux facteurs d'intégrabilité 1 et $\frac{1}{Mx+Ny}$ ce qui donne pour l'intégrale $Mx + Ny = C$.

Il y a un cas d'exception c'est celui où l'on aurait la fonction $Mx + Ny$ identiquement et d'elle même égale à une constante.

Il est facile de prouver que ce cas d'exception n'a lieu que dans le cas où le degré d'homogénéité est égal à -1.

En effet, si $Mx+Ny$ est identiquement égal à une constante déterminée α, les dérivées par rapport à x et y seront identiquement nulles et l'on aura :

$$M + x\frac{dM}{dx} + y\frac{dN}{dx} = 0$$

$$x\frac{dN}{dy} + N + y\frac{dN}{dy} = 0$$

Introduisons maintenant la condition que M et N sont des fonctions homogènes, c'est-à-dire : $x\frac{dM}{dx} + y\frac{dM}{dy} = Mm$.
On en tire $x\frac{dM}{dx} = Mm - y\frac{dM}{dy}$ et en substituant dans la première identité il vient : $M(1+m) + y\left(\frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy}\right) = 0$.
relation qui doit être identiquement nulle, et qui par conséquent donne $1+m=0$, d'où $m=-1$.

La même relation montre que réciproquement si le degré d'homogénéité est égal à -1 et que $Mx+My$ soit identiquement égal à α, la condition d'intégrabilité sera satisfaite, car alors $(1+m)=0$, et l'on en tire :
$\frac{dM}{dx} - \frac{dM}{dy} = 0$.

Maintenant en mettant de côté les cas d'exception on peut vérifier que $Mx+Ny=C$ est bien l'intégrale générale de la proposée. En différentiant il viendra :

$$Mdx + x\frac{dM}{dx}dx + x\frac{dM}{dy}dy + Ndy + y\frac{dM}{dx}dx + y\frac{dN}{dy}dy = 0$$

exprimant que M et N sont des fonctions homogènes et ordonnant on trouve :

$$M\,dx+\left(mM-y\frac{dM}{dy}\right)dx+x\frac{dM}{dy}dy+N\,dy+y\frac{dN}{dx}dx+\left(mN-x\frac{dN}{dx}\right)dy=0$$

ou enfin $(1+m)\left[M\,dx+N\,dy\right]=0$. Or, par hypothèse $1+m$ n'est pas nul, on aura donc l'équation différentielle $M\,dx+N\,dy=0$ satisfaite.

On conçoit très bien qu'il doive exister ce cas d'exception, car si non il s'ensuivrait une méthode générale pour trouver les intégrales des équations homogènes, et on ne trouverait jamais de relations transcendantes pour leurs intégrales lorsque M et N sont des fonctions algébriques.

On a vu de quelle utilité serait la recherche des facteurs d'intégrabilité; il nous reste donc à voir s'il n'existe pas une méthode générale pouvant servir à leur détermination.

Or, on a trouvé $\mu M\,dx+\mu N\,dy=dc$. On en tire évidemment $\dfrac{d(\mu M)}{dy}=\dfrac{d(\mu N)}{dx}$. En développant, il vient :

$M\dfrac{d\mu}{dy}-N\dfrac{d\mu}{dx}=\mu\left(\dfrac{dN}{dx}-\dfrac{dM}{dy}\right)$ cette equation est ce que l'on appelle une équation aux différences partielles et sa résolution est souvent plus difficile que celle de l'intégrale.

On peut néanmoins déterminer ce facteur μ au moyen de cette équation dans certains cas particuliers.

Si la condition d'intégrabilité est satisfaite, l'équation devient $M\dfrac{d\mu}{dy}-N\dfrac{d\mu}{dx}$ et elle est évidemment satisfaite par $\mu=C$; ce résultat pouvait être prévu, car dans ce cas la proposée est une différentielle totale.

Si le facteur μ doit être indépendant d'une des variables de y par exemple, on aura : $\dfrac{d\mu}{dy}=0$, et l'équation donnera:

$$\frac{\frac{d\mu}{dx}}{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right); \quad \frac{1}{N}\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)$$ devra alors

être indépendante de x et si cette condition est satisfaite μ se trouvera déterminé par une simple quadrature.

On est donc amené à chercher dans quel cas cette condition a lieu. Pour simplifier les calculs nous supposerons $N = 1$. (Cette supposition n'altère en rien la généralité du résultat si l'on se réserve la discussion du cas où l'on aurait $N = 0$).

En introduisant cette hypothèse, on voit qu'il faudra que $\frac{dM}{dy} = 0$, ce qui exige que M soit de la forme

$$y\,\varphi(x) + \psi(x)$$

On retombe ainsi sur une équation que nous avons déjà appris à intégrer, car en reportant ces valeurs de M et de N il vient $dy + [y\,\varphi x + \psi(x)]\,dx = 0$ qui est l'équation linéaire que nous savons intégrer.

Il est encore un cas particulier où le facteur d'intégrabilité peut être déterminé à priori, c'est celui des équations homogènes.

On se propose de chercher s'il existe un facteur homogène satisfaisant à la question et dans ce cas de déterminer son degré d'homogénéité et sa valeur.

Supposons que <u>n</u> soit le degré d'homogénéité de ce facteur, on aura $\mu M\,dx + \mu N\,dy = dc$ et il en résultera que μM et μN seront des fonctions homogènes du degré $m+n$; ce résultat s'exprimera par la relation :

$$x\frac{d(\mu M)}{dx} + y\frac{d(\mu M)}{dy} = (m+n)\,\mu M.$$

Or on a :

$$\frac{d(\mu M)}{dy} = \frac{d(\mu N)}{dy} \text{ et } x\frac{d(\mu M)}{dx} = \frac{d(x\mu M)}{dx} - M\mu.$$

Il viendra donc enfin :

$$\frac{d(x\mu M)}{dx} + \frac{d(y\mu N)}{dx} = (m+n+1)\,\mu M$$

où $\frac{d}{dx}\left[\mu(Mx+Ny)\right] = (m+n+1)\,\mu M.$

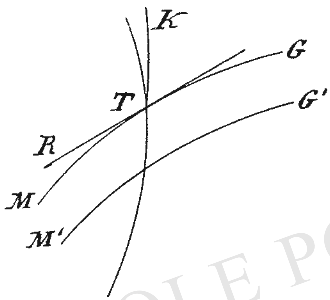
Cela posé, on voit que si l'on pose $m+n+1=0$ d'où $n=-m-1$ on aura $\frac{d}{dx}\left[\mu(Mx+Ny)\right]=0$. On trouverait de la même manière $\frac{d}{dy}\left[\mu(Mx+Ny)\right]=0$, de sorte que l'on aura :

$\mu(Mx+Ny)=C$ et par suite $\mu=\frac{C}{Mx+Ny}$; le facteur $\frac{1}{Mx+Ny}$ que nous avions déjà trouvé n'en est qu'un cas particulier.

L'intégration des équations différentielles que nous avons déjà examinées permet d'appliquer l'analyse à quelques problèmes de géométrie.

Problème des trajectoires : Trouver une courbe qui coupe sous un angle donné une suite de courbes dont les équations ne diffèrent que par un paramètre arbitraire.

Soit, $\Phi\ (x, y, C) = 0\ (1)$ l'équation qui représente la suite des courbes données. En désignant par m la tangente de l'angle sous lequel la trajectoire doit les couper, et par p_1 et p les coefficients angulaires des droites TR et TK, on devra avoir

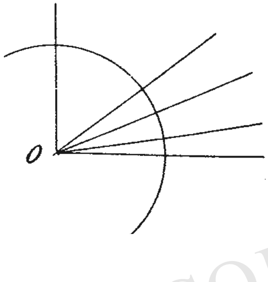


$$m = \frac{p_1 - p}{1 + p p_1}\ (2).$$ De plus en différentiant $\Phi = 0$, on a $$\frac{d\Phi}{dx} + \frac{d\Phi}{dy} p_1 = 0\ (3).$$

Si l'on élimine p_1 et C entre ces trois équations on aura une relation entre x, y et p qui sera l'équation différentielle de la courbe cherchée.

Appliquons cette méthode générale au cas où

1°. L'équation $\Phi = y - cx = 0\ (1)$, elle représente une suite de droites passant toutes par le point O.



On a $p_1 = C = \frac{y}{x}$ en substituant dans la formule générale (2) et réduisant il vient : $(mx - y) + (my + x)\,p = 0$. Cette équation est homogène et il est

facile de voir que la condition d'intégrabilité n'est pas satisfaite. On peut trouver un facteur d'intégrabilité et ce facteur égal à $\frac{1}{(mx-y)x+(my+x)y} = \frac{1}{x^2+y^2}$ de sorte que $\frac{mx-y}{x^2+y^2}dx + \frac{my+x}{x^2+y^2}dy = 0$ sera une différentielle exacte. La fonction u dont elle est la différentielle exacte se construira immédiatement en formant

$u = \int M dx + \int N_y dy$ et si l'on remarque que $N_y = 0$, on aura $u = \int M dx = \int \frac{mx-y}{x^2+y^2} dx$.

or. $\int \frac{mx-y}{x^2+y^2}dx = \int \frac{mx\,dx}{x^2+y^2} - \int \frac{y\,dx}{x^2+y^2}$ et

$$\int \frac{mx\,dx}{x^2+y^2} = \frac{m}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+y^2} = \frac{m}{2}\log.(x^2+y^2) = m\log.\sqrt{x^2+y^2}$$

$\int \frac{y\,dx}{x^2+y^2} = \int \frac{d\frac{x}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \text{arc tg.}\frac{x}{y}$. d'où l'on tirera pour l'intégrale générale $u = m\log.\sqrt{x^2+y^2} - \text{arc tg}\left(\frac{x}{y}\right) = \log.C$, et enfin

$$\log.\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{C}\right) = \frac{1}{m}\,\text{arc tang.}\left(\frac{x}{y}\right).$$

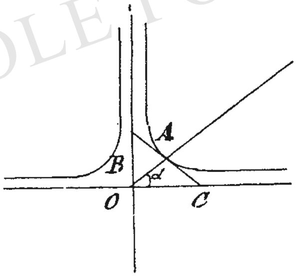
En passant aux coordonnées polaires on tire :

$\log.\left(\frac{\rho}{c}\right) = \frac{1}{m}\omega$ d'où $\rho = Ce^{\frac{\omega}{m}}$. Cette courbe est une spirale logarithmique.

Dans le cas de $m = \infty$ on a $\rho = C$ équation d'un

cercle, et ce résultat était facile à prévoir.

2°. Considérons la suite d'hyperboles équilatères



représentées par la relation $xy = C^2$. On aura encore $p_1 = -\frac{y}{x}$ et en substituant dans (2). $(mx+y)+(x-my)p=0$ c'est une équation homogène qui satisfait aux conditions d'intégrabilité et dont le signe d'homogénéité n'est pas égale à -1, l'intégrale générale sera donc immédiatement : $(mx+y)x+(x-my)y=C$ ou $(y^2 = x^2)m-2xy=C$ qui représente une suite d'hyperboles équilatères. Les coefficients angulaires de leurs asymptotes seront donnés par la relation : $\alpha^2-\frac{2}{m}\alpha-1=0$ d'où $m=\frac{2\alpha}{1-\alpha^2}$. Cette relation prouve que l'angle qu'elles forment avec l'axe des x est la moitié de celui dont la tangente est m; comme d'ailleurs ces asymptotes sont comprises dans la série de trajectoires que nous venons d'obtenir, on en déduira facilement que $OA=AC$; on démontrerait de même que $OA=AB$ et l'on retrouve ainsi une propriété connue des asymptotes.

Si maintenant on suppose $m=0$ et $m=\infty$ on trouve $xy=C$, $y=\pm x$, résultats dont on se rendra encore facilement compte.

La détermination des solutions particulières se déduit immédiatement de la connaissance du facteur d'intégrabilité. En effet on en tire :

$$M\,dy + N\,dy = \frac{1}{\mu}\,dU = 0.$$

Or toute solution particulière doit satisfaire à l'équation différentielle donnée sans satisfaire à l'intégrale générale et par suite sans annuller dU, elle devra donc être donnée par $\frac{1}{\mu}=0$. Cette propriété est ce qui constitue la propriété analytique des solutions particulières.

La réciproque n'est évidemment pas vraie, car une solution de $\frac{1}{\mu}=0$ pourra très bien satisfaire à $V=C$.

Dans la première leçon, nous avons vu une solution particulière donnée en égalant $\frac{1}{\mu}$ à 0; nous allons maintenant développer un cas dans lequel il se trouve que toutes les solutions de $\frac{1}{\mu}=0$ sont des intégrales particulières.

Soit : $(ny+x)\,dx+(n-1)\,y\,dy=0$ c'est une équation homogène, on aura donc :

$$\mu=\frac{1}{(ny+x)x+(n-1)\,y^2}=\frac{1}{(x+y)\,[(n-1)\,y+x]}$$

$$\frac{(ny+x)\,dx}{(x+y)\,[(n-1)\,y+x]}+\frac{(n-1)\,y\,dy}{(x+y)\,[(n-1)\,y+x]}=0$$

et il est facile de construire

$$u=\int N\,dy+\int M_x\,dx \text{ comme } M_x=0 \text{ il vient :}$$

$$u=(n-1)\int\frac{y\,dy}{(x+y)\,(\overline{n-1}\,y+x)}.$$

Or $\frac{y}{(x+y)(\overline{n-1}\,y+x)}=\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{x+y}-\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{\overline{n-1}\,y+x}$. On aura donc $u=\frac{n-1}{n-2}\left[\int\frac{dy}{x+y}-\int\frac{dy}{\overline{n-1}\,y+x}\right]$. En supprimant le

facteur numérique qui entrait dans la constante arbitraire et intégrant, il viendra :

$$\log.(x+y) - \frac{1}{n-1}\log.\left[\overline{n-1}\,y + x\right] = \log.C$$

d'où enfin $\dfrac{(x+y)^{n-1}}{\overline{n-1}\,y+x} = C$ pour l'intégrale générale.

Pour avoir les solutions particulières s'il y en a, on devra poser $\frac{1}{\mu}=0$, ce qui donne : $(x+y)\left[\overline{n-1}\,y+x\right]=0$. L'inspection seule de cette relation comparée à l'intégrale générale indique bien qu'il n'y a pas de solutions particulières.

En supposant connue, l'intégrale générale de la proposée, nous avons démontré l'existence d'un facteur d'intégrabilité et nous en avons même trouvé la forme générale $\mu = \dfrac{F'(y)}{NF'(c)} = \dfrac{F'(x)}{MF'(c)}$ (expression dans laquelle on suppose toujours que C a été remplacé par sa valeur tirée de $F(x,y,C)=0$). Il en résulte que dans ce cas on pourra déterminer par un procédé général les solutions particulières, car il suffira évidemment de poser :

$$\frac{1}{\mu} = \frac{NF'(c)}{F'(y)} = \frac{MF'(c)}{F'(x)} = 0.$$

Pour faciliter la discussion de ce résultat, nous supposerons que l'on ait écarté par une discussion préliminaire les cas où M et N ont un facteur commun et celui où ils auraient des dénominateurs, de telle sorte qu'ils ne peuvent pas être nuls à la fois ni prendre l'un ou l'autre une valeur infinie.

Cela posé, nous remarquons d'abord que si l'on pose ou $\dfrac{F'(c)}{F'(x)}=0$ ou $\dfrac{F'(c)}{F'(y)}=0$ on est sûr que le facteur $\frac{1}{\mu}$ sera

nul car ni M ni N ne peuvent être infinis par hypothèse, par conséquent les solutions particulières pourront être données par ce système; il y a plus elles seront toutes données par l'ensemble de ces deux relations, car si l'on n'avait ni $\frac{F'(c)}{F'(x)}=0$ ni $\frac{F'(c)}{F'(y)}=0$, il faudrait pour annuller $\frac{1}{\mu}$ que l'on eut: $\begin{cases} M=0 \\ N=0 \end{cases}$ et ce cas nous l'avons écarté.

Toutes les solutions particulières, s'il y en a, seront donc données par les systèmes suivants:

$$\begin{cases} F=0 \\ F'(c)=0 \end{cases} (1), \quad \begin{cases} F=0 \\ F'(c)=\infty \end{cases} (2), \quad \begin{cases} F=0 \\ F'(y)=\infty \end{cases} (3).$$

Il restera dans tous les cas à vérifier si les valeurs tirées de l'un ou de l'autre de ces systèmes ne rendent pas les fractions $\frac{F'(c)}{F'(x)}$ ou $\frac{F'(c)}{F'(y)}$ égales à $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$; il faudrait alors appliquer les procédés connus pour déterminer les véritables valeurs.

Il pourra se faire qu'une solution particulière exprime la même relation entre x et y qu'une intégrale particulière, car une fonction peut avoir la même valeur pour des valeurs de C, constantes ou variables; telle serait une équation de la forme:

$$y=\varphi(x)+(C-3)\left[C-\psi(x,y)\right].$$

Enfin il ne faudrait pas croire que si $\frac{dF}{dy}=\infty$ on devra avoir nécessairement $\frac{dF}{dx}=\infty$, il suffit que l'on annulle le terme $\frac{MF'(c)}{F'(x)}$ et on peut encore le faire d'une autre

manière.

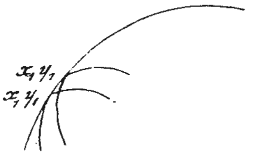
En appliquant à l'exemple $dy\sqrt{a-x}-dx=0$, on verra qu'on satisfait en posant : $F'(x)=\infty$ et que pourtant $F'(y)=$, mais dans ce cas on a recours à $N=0$.

Dans tous les cas il faudra vérifier si l'on a une intégrale ou une solution particulière par le procédé précédemment indiqué.

Les solutions particulières jouissent encore du caractère géométrique suivant. La solution particulière est l'enveloppe de toutes les courbes représentées par l'intégrale générale.

Pour la première, on démontre qu'en chaque point de la solution particulière il passe une intégrale particulière, et qu'en ce point elles ont une tangente commune.

En effet, considérons un point $[x_0\ y_0]$ de la solution particulière en substituant dans $F(x_0, y_0\ C_0)=0$ ce qui déterminera une intégrale particulière passant par ce point. Si l'on passe à un autre point (x_1, y_1) on trouvera de même une intégrale particulière passant par ce point et correspondant à la valeur de C déterminée par la relation $F(x_1, y_1, C_1)=0$.



On verra bien que c'est une valeur de C différente de la précédente. Car si on obtenait toujours la même valeur de C, il s'ensuivrait que la solution particulière serait une intégrale particulière puisqu'elle se déduirait de l'intégrale générale en y substituant cette valeur constante et déterminée de C.

Il reste à prouver que les coefficients angulaires en chacun des points sont les mêmes. Et d'abord, remarquons qu'une courbe quelconque dont l'équation est $y = f(x)$ peut être représentée par $F(x, y, C)=0$ en y substituant une valeur de C fonction de x et convenablement choisie, car si on suppose que l'on ait résolu $F=0$ par rapport à y ce qui donne $y = F_1(x, C)$ il suffira de poser : $F(x, C) = f(x)$ et d'en tirer la valeur de C.

Cela posé, en considérant $F(x, y, C)=0$ comme représentant une intégrale particulière et différentiant, il viendra :

$\frac{dF}{dx}dx + \frac{dF}{dy}dx = 0$ d'où : $\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$ (1) ; dans le cas où $F(x,y,c)=0$ sera supposé représentant la solution particulière, C sera une fonction de x et l'on aura en différentiant :

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dc}\,\frac{dc}{dx} = 0 \text{ d'où : } \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} - \left(\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}}\right)\frac{dc}{dx} \quad (2).$$

Si maintenant on suppose que l'on ait éliminé C entre $F=0$ et (1) et (2) successivement, on voit que les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$ tirées de ces deux équations seront égales à la valeur commune $-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}$. Car lorsqu'on aura remplacé C par sa valeur tirée de $F=0$, on aura $\left(\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}}\right)=0$ puisque nous considérons une solution particulière.

Il est facile de montrer que réciproquement les courbes enveloppes sont données par les solutions particulières.

En comparant les équations (1) et (2), on voit bien qu'à chaque point commun $[x,y]$ pour que les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ soient les mêmes, il faudra que l'on ait

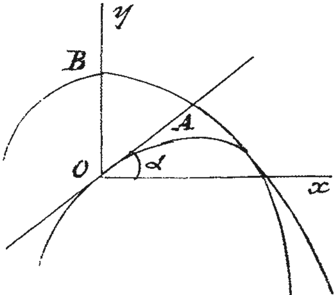
$$\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}}\;\frac{dc}{dx} = 0.$$

On aura d'abord $\frac{dc}{dx}=0$ et comme en résolvant par rapport à y on eût trouvé de même $\frac{dc}{dy}=0$, on en déduit $dc=0$ d'où l'intégrale générale: ce résultat pouvait être prévu car les intégrales particulières sont évidemment leurs enveloppes à elles-mêmes.

On devra encore avoir $\left(\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}}\right)=0$, et en considérant y comme variable indépendante $\left(\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dx}}\right)=0$. On voit qu'on retombe sur les mêmes relations que pour la solution particulière; il en résulte que toutes les observations que nous avions données alors doivent encore être appliquées à cette question.

Applications: Chercher la courbe enveloppe des paraboles parcourues par un point matériel lancé dans une direction quelconque avec une vitesse constante et déterminée.

En désignant par C la tangente de l'angle α variable sous lequel le point est projeté, il est facile de voir en appliquant les lois du mouvement que l'équation générale des courbes dont on se propose de trouver l'enveloppe est: $y-cx+\frac{gx^2}{2a^2}(1+c^2)=0$ (1).



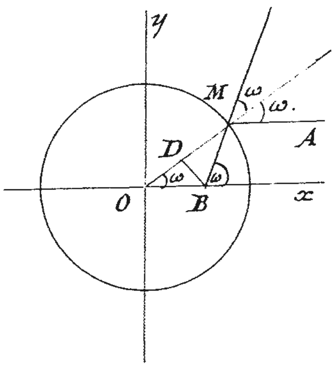
Appliquons maintenant les

formules précédemment trouvées, il faut former $\frac{F'(c)}{F'(y)}=0$ ou $\frac{F'(c)}{F'(x)}=0$; or la première de ces relations ne peut pas servir car $F'(y)=1$ et il faudrait l'égaler à ∞; de même dans la seconde on ne posera pas $F'(x)=\infty$ car il est facile de voir que pour la valeur $C=\infty$ tirée de cette relation la fraction deviendrait: $\frac{\infty}{\infty}$; nous poserons donc:

$F'(c)=0=x-\frac{gx^2c}{2a^2}$ (2). En reportant la valeur de C tirée de (2) dans (1), il viendra: $x^2=\frac{2a^2}{g}\left[\frac{a^2}{2g}-y\right]$; c'est une parabole dirigée dans le même sens que les trajectoires, ayant son foyer à l'origine et son sommet au point B (OB représentant la plus grande hauteur à laquelle le point matériel puisse parvenir avec la vitesse a.

Caustique sur le cercle des rayons incidents parallèles. Cette caustique est le lieu des intersections successives ou l'enveloppe des rayons réfléchis.

L'inspection seule de la figure donne pour l'équation générale des rayons réfléchis



$$y=tg.\omega\left(x-\frac{h}{2\cos.\omega}\right)\ (1).$$

On sera conduit de la même manière que dans le cas précédent à poser:

$$\frac{dy}{d\omega}=0=\frac{2}{\cos.^2 2\omega}\left[x-\frac{h}{2\cos.\omega}\right]-$$

$$-tg.2\omega\ \frac{4\sin.\omega}{2\cos.^2\omega}\ (2).$$

En éliminant ω entre (1) et (2) il vient $\sin\omega = \left(\frac{y}{r}\right)^{\frac{1}{3}}$ et par suite : $x^2+y^2 = h^2\left(1+3\left(\frac{y}{2h}\right)^{\frac{2}{3}}\right)$. Des considérations géométriques montreraient simplement à priori que cette courbe est une épicycloïde.

On peut en supposant qu'il existe une intégrale générale démontrer analytiquement de quelle forme elle doit être.

En effet, s'il existe une intégrale en désignant par y la valeur de la fonction, on pourra généralement appliquer la série de Maclaurin, ce qui donne :

$$y = b+(x-a)\left(\frac{dy}{dx}\right)_a + \frac{(x-a)^2}{1.2}\left(\frac{dy^2}{dx^2}\right)_a + \frac{(x-a)^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_a + \text{etc}\ldots = 0.$$

Maintenant les coefficients seront facilement déterminés au moyen de l'équation différentielle donnée : $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$. car on en tire :

$$(\alpha)\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{df}{dx} + \dfrac{df}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{df}{dx} + \dfrac{df}{dy}f(x,y) = f_1(x,y). \\ \dfrac{d^3y}{dx^3} = \dfrac{df_1}{dx} + \dfrac{df_1}{dy}\cdot\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{df_1}{dx} + \dfrac{df_1}{dy}f_1(x,y) = f_2(x,y) \text{ et ainsi de suite.} \end{array}\right.$$

On voit alors que les coefficients $\left(\frac{dy}{dx}\right)_a$, $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_a$, etc. sont parfaitement déterminés car ils seront égaux à $f(a,b)$, $f_1(a,b)$ etc.

Par conséquent dans la plus part des cas il existera une intégrale générale de la forme :

$$y = b + \frac{x-a}{1}f(a,b) + \frac{(x-a)^2}{1\cdot 2}f_1(a,b) + \frac{(x-a)^3}{1\cdot 2\cdot 3}f_2(a,b) + \text{etc}.$$

Ce résultat n'est pas parfaitement général car il ne peut plus être fait dans les cas d'exception où la série de

Maclaurin n'est plus applicable.

On peut encore employer la série de Taylor. Ce développement donne :

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1\,2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f'''(x)+\text{etc}\dots$$

Si maintenant on suppose que l'intégrale soit représentée par $y=f(x)$ et que l'on pose $h=\alpha-x$ en désignant par b la valeur arbitraire $f(\alpha)$ de y correspondant à la valeur déterminée de $x=\alpha$. Il viendra :

$$b=f(x)-\frac{x-\alpha}{1}f'(x)+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}f''(x)-\frac{(x-\alpha)^3}{1.2.3}f'''(x)+\text{etc}\dots$$

La série $(\mathcal{L})$ de relations employées dans le développement précédent donnera de la même manière $f'(x)$, $f''(x)$ etc... d'où il viendra :

$$b=y-\frac{x-\alpha}{1}f+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}f_1\,\frac{(x-\alpha)^3}{1.2.3}f_2+\text{etc}\dots$$

On peut vérifier que c'est bien l'intégrale générale de la proposée.

En effet, en différentiant il vient :

$$0=\frac{dy}{dx}-f+\frac{x-\alpha}{1}f_1-\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}f_2$$

$$-\frac{x-\alpha}{1}\left(\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right)+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}\left(\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dy}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$ ou en

ordonnant et remplaçant f_1, f_2, etc par leurs valeurs tirées de la suite $(\mathcal{L})$

$$0=\frac{dy}{dx}-f-\frac{x-\alpha}{1}\left[\frac{df}{dx}+\frac{df}{dy}\frac{dy}{dx}-\frac{df}{dx}-\frac{df}{dy}f\right]+\text{etc}\dots$$

En réduisant et mettant $\left[\frac{dy}{dx}-f\right]$ en facteur commun.

Il vient :

$$0=\left(\frac{dy}{dx}-f\right)\left[1-\frac{x-a}{1}\,\frac{df}{dy}+\frac{(x-a)^2}{1.2}\,\frac{df_1}{dy}-\dots\right]=\left(\frac{dy}{dx}-f\right)\frac{db}{dx}.$$

Ce résultat montre bien qu'elle satisfait à l'équation différentielle proposée ; de plus on voit que $\frac{db}{dx}$ est le facteur d'intégrabilité. C'est en effet la valeur que l'on trouve en appliquant la formule générale $\frac{F'(b)}{NF'(y)}$ car alors $N=1$.

Les équations différentielles dont nous avons jusqu'à présent déterminé les intégrales étaient supposées résolues par rapport à $\frac{dy}{dx}$, car nous avons constamment raisonné sur l'équation $Mdx+Ndy=0$, et cette relation ne s'obtient qu'autant que l'on a $\frac{dy}{dx}=-\frac{M}{N}$.

Occupons nous actuellement de l'intégration des équations différentielles qui renferment p implicitement.

Et d'abord, commençons par celles qui ne contiennent que p.

On aura donc $F(p)=0$. En supposant cette équation résolue, on voit bien que les solutions seront de la forme: $p=\alpha$, $p=\alpha'$; $p=\alpha''$.. etc, de sorte qu'elle pourra être représentée par

$$(p-\alpha)(p-\alpha')(p-\alpha'')\ldots\ldots=0.\ (1)$$

Cela posé, chacune de ces solutions étant intégrée donne évidemment $y=\alpha x+c$, $y=\alpha' x+c$ ..... ou sous une autre forme: $\frac{y-c}{x}=\alpha$, $\frac{y-c}{x}=\alpha'$ ..... De telle manière que si l'on veut embrasser toutes ces solutions dans une même relation qui les donne toutes, on aura:

$$\left(\frac{y-c}{x}-\alpha\right)\left(\frac{y-c}{x}-\alpha'\right)\left(\frac{y-c}{x}-\alpha''\right)\ldots\ldots=0\quad(2).$$

Cette relation n'est autre chose évidemment que (1) dans laquelle on aura remplacé p par $\frac{y-c}{x}$ ou $F\left(\frac{y-c}{x}\right)=0$ qui donne l'intégrale générale cherchée.

Il faut remarquer que dans chacune de ces opérations particulières, nous avons désigné la constante arbitraire par la même lettre c; cela tient à ce que ces constantes ne sont assujetties à aucune relation entre elles. Il est d'ail-

-leurs évidens à l'inspection seule de l'intégrale que chacune des exprimées par l'une quelconque de ces intégrales prises séparément la de $F\left(\frac{y-c}{x}\right)$ en donnant à c la valeur convenable.

Considérons le cas où l'équation différentielle ne renferme que l'une des variables et p, et de plus où elle est résolue par cette variable.

Soit donc : $x = F\left(\frac{dy}{dx}\right)$. Si l'on pose : $\frac{dy}{dx} = p$ (1) il viendra : $x = F(p)$. En différentiant et remplaçant dx par sa valeur tirée de (1) il vient $dy = F'(p)\, p\, dp$. Cette relation est immédiatement intégrale et donne

$$y = \int F'(p)\, p\, dp + c = \psi(c, p) \quad (2).$$

Si maintenant on élimine p entre (1) et (2) on aura une relation entre x, y et c qui sera l'intégrale cherchée.

Pour le vérifier, je remarque que pour chaque système de valeurs (x, y) de l'équation ainsi obtenue j'ai $x = F(p)$; de plus si l'on forme $dy = F'(p)\, p\, dp$ et $dx = F'(p)\, dp$, on en tire $\frac{dy}{dx} = p$; donc pour chaque point on aura $x = F\left(\frac{dy}{dx}\right)$ qui n'est autre chose que l'équation différentielle proposée.

Dans le cas où l'on aurait $y = F\left(\frac{dy}{dx}\right)$ les raisonnements seraient identiques et l'on arriverait à des résultats en tout analogues.

Considérons enfin le cas où l'équation différentielle renferme p et les deux variables x et y, et peut être résolue par rapport à l'une de ces variables.

Soit donc : $y = F(x, p)$. En différentiant il vient :

$$dy = p\,dx = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dp}dp.\ \text{d'où}: \left(\frac{dF}{dx} - p\right)dx + \frac{dF}{dp}dp = 0.$$

Equation de la forme $M\,dx + N\,dy = 0$ de telle sorte que si elle reste dans une des classes d'équations que nous savons intégrer, nous pourrons obtenir son intégrale.

Le cas où l'on aurait $x = F(y, p)$ se traiterait encore d'une manière identique.

Application au cas où l'équation est linéaire par rapport à x et y et par conséquent de la forme : $y = xf(p) + F(p)$ (1).
En différentiant et remplaçant dy par $p\,dx$, il vient :
$p\,dx = dy = f(p)\,dx + dp\left(xf'(p) + F'(p)\right)$ puis en réduisant et ordonnant :

$$\frac{dx}{dp} + \frac{f'(p)}{f(p) - p}x = -\frac{F'(p)\,dp}{f(p) - p}.$$

Equation linéaire par rapport à x que l'on sait intégrer.

$$\text{On a donc}: x = e^{-\frac{\int f(p)\,dp}{fp - p}}\left[C - \int e^{\frac{\int f'p\,dp}{fp - p}} \times \frac{F'(p)}{f(p) - p}dp\right] (3).$$

En éliminant p entre (1) et (2) on aura encore l'intégrale générale. On peut encore le vérifier de la même manière que précédemment.

En effet, on a (3) $dy = f(p)\,dx + \left[xf'(p) + F'(p)\right]dp$, et en différentiant :

$$(2)\ dx = e^{-\frac{\int f(p)\,dp}{f(p) - p}}\left[C - \int e^{\frac{\int f'p\,dp}{f(p) - p}} \times \frac{F'p}{f(p) - p}dp\right] \times -\frac{f'(p)}{f(p) - p}dp - \frac{F(p)}{f(p) - p}dp$$

ou en remarquant que $e^{-\int}[\quad] = x$ et réduisant :

$dx\left(p - f(p)\right) = \left[F'(p) + xf'(p)\right]dp$ (4). En remplaçant dans

(4) $\left[F'(p)+xf'(p)\right]dp$ par sa valeur tirée de (3) il viendra $\frac{dy}{dx}=p$. On conclura encore comme précédemment que cette relation devant être satisfaite avec (1), l'équation différentielle sera aussi satisfaite.

Il faut remarquer que toutes ces formules sont en défaut dans le cas particulier où l'on a : $f(p)-p=0$. Traitons le directement. On a l'équation : $y=px+F(p)$ (1).
En suivant toujours la même marche on trouvera :
$dy=pdx=pdx+(x+F'(p))dp$, ce qui donne immédiatem^t :
$(x+F'(p))dp=0$ (2). On en tire d'abord $dp=0$, d'où $p=c$ et pour l'intégrale générale $y=cx+F(x)$ (3).

Enfin on a : $x+F'(p)=0$ (4) qui doit être combinée avec (1). Il est facile de voir qu'on aura aussi une solution particulière car de (4) on ne peut tirer pour p qu'une valeur fonction de x, et il n'existe pas de fonction de x qui mise à la place de c dans (3) puisse lui faire représenter une droite.

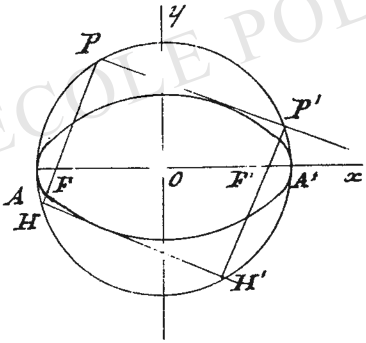
On voit enfin que cette courbe est l'enveloppe de toutes les limites représentées par l'intégrale générale, car une tangente quelconque à cette courbe sera l'une de ces droites.
En effet, l'équation de la tangente est $Y-y=p(X-x)$ ou $Y-px-F(p)=pX-px$ et en réduisant :
$Y=pX+F(p)$.

Applications géométriques.

1°. Trouver une courbe telle que le produit des perpendiculaires abaissées de deux points du plan sur ses tangentes soit constant.

L'équation générale de la tangente étant : $Y-y=p(X-x)$

Donc on aura en désignant $OF = OF'$ par a :



$$F'P' = \frac{-y - p(a-x)}{\sqrt{1+p}} \text{ et } FP = \frac{-y + p(a+x)}{\sqrt{1+p}}.$$

l'équation du problème sera donc.

$$F'P' \times FP = \frac{(y-px)^2 - a^2p^2}{1+p^2} = b^2.$$

d'où $y = px \pm \sqrt{p^2(a^2+b^2)}$ (1).

On en déduit immédiatement l'intégrale générale:

$$y = cx \pm \sqrt{(a^2+b^2)\,c^2 + b^2} \quad (2).$$

On obtient une suite de couples de droites qui ne sont autre chose que les tangentes elles-mêmes; la figure seule indique bien que pour une même valeur déterminée de c on a deux tangentes telles que PP', HH' satisfaisant à la question. L'enveloppe de toutes ces droites est évidemment la courbe cherchée, et sa nature peut être dès à présent connue car l'équation (2) est bien l'équation générale des tangentes à l'ellipse.

Pour trouver son équation, cherchons celle des courbes enveloppes des droites représentées par (2) et pour cela formons $F'(c) = 0 = x \pm \dfrac{c(a^2+b^2)}{\sqrt{c^2(a^2+b^2)+b^2}}$ (3) qu'il faut combiner avec (2) en remplaçant x par sa valeur tirée de (3), il vient: $y = \dfrac{b^2}{\sqrt{c^2(a^2+b^2)+b^2}}$ (4).

or (3) et (4) donnent $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+b^2}} = \mp \dfrac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{c^2(a^2+b^2)+b^2}}$

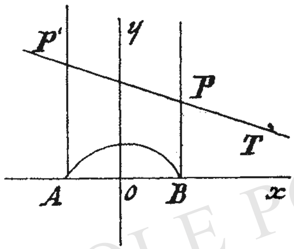
$$\frac{y}{b} = \pm \frac{b}{\sqrt{c(a^2+b^2)+b^2}},$$

et par suite $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2+b^2} = 1$ équation d'une ellipse dont

les points F et F' sont les foyers.

S'il'on avait pris $-b^2$ on aurait trouvé une hyperbole; ce résultat sera d'ailleurs très facilement interprété.

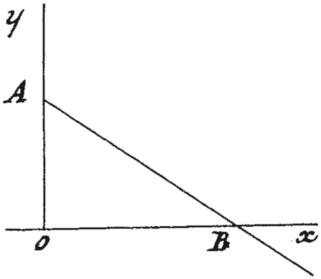
On pourrait encore chercher la courbe telle que les segments interceptés par ses tangentes sur deux droites parallèles donnent un produit constant.



On arrivera facilement à l'équation différentielle
$y = px \pm \sqrt{a^2p^2+b^2}$ et la comparaison de ce résultat avec celui obtenu dans l'exemple précédent montre que c'est encore une ellipse dont l'équation est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3°. Trouver une courbe telle que la portion de sa tangente comprise entre deux axes rectangulaires soit égale à une longueur constante a.



En se servant de l'équation générale de la tangente, on trouvera simplement :
$oB = x - \frac{y}{p}$, $oA = y - px$ et par suite l'équation du problème sera :

$$(y-px)^2+\frac{(y-px)^2}{p^2}=a^2 \text{ d'où } y=px\pm\frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$$

L'intégrale générale sera donc : $y=cx\pm\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}$ (1).
(le double signe s'expliquera comme précédemment).

Si nous cherchons l'enveloppe de ces droites nous aurons :

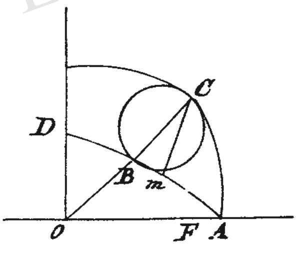
$F'(c)=0=x\pm\frac{a}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}$ et par suite.

$y=\frac{\pm ac^3}{(1+c^2)^{\frac{3}{2}}}$. On en tire comme précédemment en élevant à la puissance $\frac{2}{3}$.

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{y}{a}\right)^{\frac{2}{3}}=1.$$

Il est facile de voir par la géométrie que c'est une épicycloïde engendrée par un cercle de rayon $=\frac{a}{4}$ roulant intérieurement sur le cercle de rayon a.

Nous allons montrer que cette épicycloïde jouit de la propriété d'avoir sa tangente de longueur constante $=a$.



En effet, dans le roulement on aura $Cm=4CA$ et par suite l'angle $CBm=2COA$ car

$$CBm=\frac{Cm}{2}=2CA=2COA.$$

Le triangle ABO sera donc isocèle et par suite $AB=OB=a$. On prouverait de même que $DB=OB=a$

Il est d'ailleurs évident que DE est la tangente à

la courbe ainsi engendrée, car Cm est sa normale.

Intégration des équations différentielles d'un ordre supérieur.

On appelle équation différentielle de l'ordre n une équation de la forme :

$$\varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0.$$

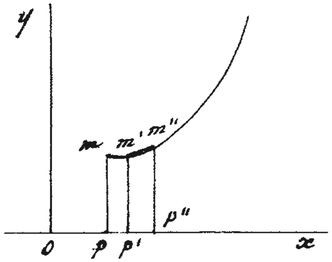
L'intégration de cette équation consiste à chercher une relation en x, y qui y satisfasse identiquement.

On peut faire voir qu'une équation primitive, c'est-à-dire une relation entre x et y sans coefficients différentiels doit avoir n constantes arbitraires pour avoir la même généralité que la proposée.

Pour cela, il faut d'abord remarquer que si l'on donne un point d'une courbe (x_0, y_0) et les différentes valeurs des dérivées

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = p_0 \; \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = q_0, \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = r_0,$$ on pourra à partir de ce point continuer les n points suivants si l'on connaît les $\overline{n-1}$ premières dérivées : $p_0, q_0, r_0 \ldots$ etc.

En effet, partons du point $m\,[x_0\, y_0]$. On aura évidemment pour le point suivant m' :



$x_1 = x_0 + dx_0$ et $y_1 = y_0 + dy_0 = y_0 + p_0\, dx_0$ et comme x_0, y_0, p_0 sont donnés le point m' sera parfaitement déterminé.

De même pour le point suivant m'' on aura : $x_2 = x_1 + dx_0$, car on donne à x un accroissement constant d'où

$x_2 = x_0 + 2dx_0$, $y_2 = y_1 + dy$, or on a
$y_2 = y_0 + 2p_0 dx_0 + q_0 dx_0$ et par suite le point m'' sera encore parfaitement déterminé puisque l'on suppose données les quantités x_0, y_0, p_0, q_0.

On continuerait ainsi pour les points suivants etc. par suite on peut en conclure que si l'on donnait les $\overline{n-1}$ premières dérivées $p_0, q_0, r_0 \ldots$ etc, on pourrait construire n points successifs de la courbe.

Cela posé, revenons à l'équation différentielle donnée qui n'est autre chose que $\varphi\left(x, y, p, q, \ldots r, \frac{d^n y}{dx_n}\right) = 0$.

Il est facile de voir que si l'on donne x_0, y_0 et les $\overline{n-1}$ premières dérivées $p_0, q_0 \ldots r_0$ on en déduira : $\left[\frac{d^n y}{dx^n}\right]$ et par suite on pourra d'après ce qui précède construire $\overline{n+1}$ points successifs de la courbe représentée par l'équation.

Maintenant si au lieu de partir du point $m[x_0, y_0]$ nous partons du point suivant $m'[x_1, y_1]$ nous pourrons encore continuer $\overline{n+1}$ points à partir de m' et par suite un point de plus que tout à l'heure.

Pour le prouver, il suffit de faire voir qu'entre x_1 et y_1 on connaitra : $p_1, q_1, r_1 \ldots r_1$ et $\left[\frac{d^n y}{dx^n}\right]_1$.

Or, pour ces points on aura évidemment les équations analogues à celles du cas précédent :

$$(\alpha)\begin{cases} y_2 = y_1 + p_1\, dx_1 \\ y_3 = y_1 + 2p_1\, dx_1 + q_1\, dx_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n-1} = y_1 + \ldots\ldots + r_1\, dx_1 \text{ et} \\ \varphi\left(x_1, y_1, p_1, q_1) \ldots\ldots r_1, \left(\frac{d^n y}{dx_n}\right)_1\right] = 0. \end{cases}$$

Ce système (α) de n équations déterminera donc les n dérivées cherchées.

On voit donc enfin qu'en avançant chaque fois le départ d'un point il sera possible de construire un nouveau point de la courbe et par suite la courbe entière.

Donc si l'équation primitive existe elle doit être telle que pour une valeur déterminée de $x = x_0$ on puisse attribuer à y et à ses $\overline{n-1}$ premières dérivées des valeurs arbitraires. Elle doit donc être de la forme :

$$F(x, y, c, c' \ldots . c_{n-1}) = 0.$$

$c, c', c'' \ldots c_{n-1}$ étant des constantes satisfaisant à cette cette condition ci-dessus énoncée.

La formule de Maclaurin peut encore démontrer l'existence d'une fonction de x qui satisfait à l'équation différentielle donnée.

En effet, cette fonction y supposée existant pourra être développé de la manière suivante :

$$y = y_{(\alpha)} + \frac{x-\alpha}{1} y'_{(\alpha)} + \frac{(x-\alpha)^2}{1.2} y''_{(\alpha)} + \cdots + \frac{(x-\alpha)^n}{1.2..n} y^{(n)}_{(\alpha)} + \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{1.2..(n+1)} y^{(n+1)}_{(\alpha)} + \text{etc.}$$

Il reste à faire voir que les coefficients peuvent être déterminés. Pour cela je remarque que si l'on donne pour $y_{(\alpha)}, y'_{(\alpha)}, y''_{(\alpha)} \ldots . y^{(n-1)}_{(\alpha)}$ des valeurs arbitraires tous les autres coefficients seront parfaitement déterminés.

En effet, l'équation différentielle proposée peut être mise sous la forme :

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}) = y^{(n)}.$$

En différentiant il vient :

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} = \frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}y' + \frac{df}{dy'}y'' + \cdots + \frac{df}{dy^{(n-1)}}y^{(n)} = f_1(x, y_1, y_1' \cdots y^{(n-1)})$$

car $y^{(n)} = f(x, y_1, y' \cdots y^{(n-1)})$.

On aurait de même : $\frac{d^{n+2}y}{dx^{n+2}} = f_2(x, y_1, y' \cdots y^{(n-1)})$, et ainsi de suite. Ces relations montrent bien que $y, y', y'' \ldots y^{(n-1)}$ étant prises arbitraires pour une valeur de $x = 0$ les autres coefficients $y^{(n)}_{(a)}, y^{(n+1)}_{(a)} \ldots$ seront parfaitement déterminés. De telle sorte que la valeur de la fonction deviendra.

$$y = y_{(a)} + \frac{(x-a)}{1}y'_{(a)} + \cdots + \frac{(x-a)}{1.2\ldots n}f_{(a)} + \frac{(x-a)^{n+1}}{1.2\ldots(n+1)}f_1^{(a)} + \&c \ldots$$

qui contient bien n constantes arbitraires.

Il pourrait se faire qu'une intégrale générale contint en évidence plus de constantes arbitraires que ne l'exige l'équation différentielle à laquelle elle satisfait ; c'est que dans ce cas elles sont liées entre elles par des relations.

Ainsi dans l'exemple suivant :

$$y = C_1 \sin(x+a_1) + C_2 \sin.(x+a_2) + C_3 \sin.(x+a_3).$$

il parait y avoir trois constantes arbitraires. Si l'on différentie il vient : $\frac{dy}{dx} = C_1 \cos.(x+a_1) + C_2 \cos.(x+a_2) + C_3 \cos.(x+a_3)$

et $\frac{d^2y}{dx^2} = -C_1 \sin(x+a_1) - C_2 \sin(x+a_2) - C_3 \sin.(x+a_3)$.

ou $\frac{d^2y}{dx^2} = -y$, ce dernier résultat montre bien qu'il doit exister une relation entre les trois constantes C_1, C_2, C_3 puisqu'elles doivent y satisfaire.

On peut d'ailleurs faire voir immédiatement qu'il n'y a que deux constantes, car en développant :

$\sin(x+\alpha_1), \cos(x+\alpha_1) \ldots$ on a : $y = \sin x \left[C_1 \cos\alpha_1 + C_2 \cos\alpha_2 + C_3 \cos\alpha_3\right) + \cos x \left[C_1 \sin\alpha_1 + C_2 \sin\alpha_2 + C_3 \sin\alpha_3\right] = A \sin x + B \cos x$.

Il résulte de ce que nous avons exposé précédemment que dans le cas où l'équation a une intégrale générale, celle-ci doit contenir n constantes arbitraires et de plus être telle que si on la différentie n fois et que l'on élimine entre les $\overline{n+1}$ relations que l'on obtient en considérant $F=0$ les n constantes arbitraires, on devra retomber sur une relation qui puisse être identifiée à l'équation différentielle donnée.

Il résulte encore de ce que nous avons vu que quelque soit le procédé employé pour l'élimination on devra retomber sur le même résultat. Car si l'on admet que l'on arrive à un résultat différent pour $y_{(n)}$ de celui donné par l'équation différentielle, on pourra en substituant ces deux valeurs dans la série précédemment obtenue trouver deux séries différentes représentant la même quantité ce qui est impossible. On pourrait encore dire que sauf le cas de points singuliers, le coefficient différentiel $\dfrac{d^ny}{dx^n}$ a une valeur unique.

Si l'on différentiait $\overline{n-1}$ fois la fonction $F=0$ et qu'on élimine entre cette suite d'équations différentielles ainsi obtenues et $F=0$, $\overline{n-1}$ constantes, il en résulterait une relation de la forme $f(x, y, y' \ldots y^{(n-1)}, C) = 0$, qui est dite *intégrale première*.

Elle renferme la même généralité que la proposée et de plus elle est telle que si on la différentie et que l'on

élimine entre elle et la relation ainsi obtenue la constante arbitraire C_1, la valeur de $y_{(n)}$ trouvée devra être identique à celle donnée par la proposée.

On voit d'ailleurs qu'il y en aura en nombre $\underline{n}$ car à chaque constante il en comprendra une.

Ces intégrales premières jouissent d'une propriété très remarquable: Quand on a une intégrale première d'une équation différentielle, la difficulté de sa résolution est abaissée d'un ordre; car elle a la même généralité et elle est d'un ordre moindre d'une unité. Si on en a deux, la difficulté est abaissée de deux ordres, car on ne pourra éliminer entre elles $y_{\overline{(n-1)}}$ et l'on aura à intégrer une équation de l'ordre $\overline{n-2}$. En continuant les mêmes raisonnements, on conclura que si l'on avait m intégrales premières, on serait ramené à l'intégration d'une équation de degré $\overline{n-m}$.

Dans le cas de $m=n$, on voit que l'intégration se trouvera faite immédiatement par une simple opération d'élimination.

Il est nécessaire pour tous ces résultats que ces intégrales premières aient autant de généralité que la proposée, ou autrement que ce soient des intégrales premières générales.

Il importe donc de savoir reconnaître si une relation de la forme $f(x, y, y' \dots y_{(n-1)} C_1) = 0$ est une intégrale première générale ou particulière.

Pour cela, nous pourrons la supposer résolue par rapport à la constante ce qui donne:

$$C = f_1(x, y, y' \dots (y_{(n-1)}) = 0.$$

Si on différentie il vient:

$$o = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy} y' + \frac{df_1}{dy'} y'' + \cdots + \frac{df}{dy^{(n-1)}} y_{(n)} = c.$$

puis si on égale entre elles les valeurs de $y_{(n)}$ tirées de cette relation et de l'équation donnée on devra dans le cas où ce sera une intégrale première générale trouver une identité quelconque soit $y, y', y'' \ldots (y_{n-1})$ puisqu'elle doit avoir la même généralité que la proposée.

Dans le cas où ce sera une intégrale première particulière on retombera sur une relation entre $y, y', y'' \ldots y_{(n-1)}$ qui sera le résultat d'hypothèses précédemment établies par la question.

Nous remarquerons que chacune de ces intégrales comparée à $F=0$, peut servir à déterminer l'existence d'un facteur d'intégrabilité et par suite de solutions particulières (voir les leçons sur le calcul des fonctions par Lagrange).

Nous avons déjà en réalité appliqué cette théorie à un exemple précédent. Dans le cas de l'équation différentielle $y = xf(p) + F(p)$ (1), nous avons ramené sa résolution à celle d'une équation du second ordre, car elle contient dp : or (1) étant une intégrale première de cette équation, on en a trouvé une seconde $\Phi(x, y, p, C) = 0$; et il a suffi d'éliminer p entre deux intégrales premières pour trouver l'intégrale cherchée.

Si entre $F=0, F'=0, F''=0, \ldots F_{n-2}$ on élimine $n-2$ constantes quelconques, on aura ce que l'on appelle des <u>intégrales secondes</u>; il est d'ailleurs évident que l'on en aura autant qu'il est possible de faire de combinaisons avec les constantes 2 à 2 c'est-à-dire $\frac{n(n-1)}{2}$.

On continuerait d'une manière identique pour les intégrales des ordres suivants.

Intégration de $\frac{d^n y}{dx^n} = X$ (X représentant une fonction de x seulement).

On a évidemment $\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = X$ d'où

$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int X\,dx + C_1$ or de la même manière on tire :

$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \frac{d}{dx}\left[\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right] = \int X\,dx + C_1$. d'où en chassant le dénominateur et intégrant :

$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int dx \int X\,dx + C_1 x + C_2$ on aura encore :

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = \int dx \int dx \int X\,dx + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3 .$$

et enfin en continuant :

$$y = \int dx \int dx \int dx \ldots \int X\,dx + C_1 x^{n-1} + C_2 x^{n-2} + \ldots + C_n .$$

expression dans laquelle le premier terme renferme n intégrations successives. Ce terme se représente symboliquement par $\int^{(n)} X\,dx^n$.

Il faut remarquer que cette relation peut s'obtenir par de simples quadratures, et pour cela il suffit d'en changer la forme par le moyen suivant :

On a $\int^{(2)} X\,dx^2 = \int dx \int X\,dx$ ou en intégrant par parties

$$\int^{(2)} X\,dx^2 = x\int X\,dx - \int x X\,dx .$$

On aura de la même manière :

$$\int^{(3)} X\,dx^3 = \int dx \int^{(2)} X\,dx^2 = \int x\,dx \int X\,dx - \int dx \int x X\,dx$$

en intégrant par parties chacune de ces intégrales alors dou-

— [illegible] il vient :

$$\int^{(3)} X\,dx^3 = \frac{x^2}{2}\int X\,dx - \frac{1}{2}\int x^2 X\,dx - x\int x^2 X\,dx = \frac{1}{1.2}\left[x^2\int X\,dx - 2x\int x X\,dx + \int x^2 X\,dx\right]$$

On peut remarquer une loi c'est que dans le terme entre parenthèses l'exposant de x considéré comme coefficient du signe $\int$ va toujours en s'abaissant d'une unité; tandis que celui du même facteur sous le signe $\int$ va toujours en augmentant de la même quantité; d'ailleurs les coefficients des termes entre parenthèses sont ceux du développement des puissances successives du binôme.

Nous allons faire voir que cette loi est générale et comme d'ailleurs ces développements ne renferment que de simples quadratures, on en déduira naturellement l'intégration de l'expression $\int^{(n} X.dx^n$.

La généralité de ce résultat se trouvera démontrée si l'on fait voir que lorsqu'il y a lieu pour $\int^{(n)}$ il aura aussi lieu pour $\int^{(n+1)}$, ou ce qui revient au même que si l'on construit une fonction U, en appliquant cette loi au cas de l'indice $\overline{n+1}$, sa dérivée sera égale à $\int^{(n)}$. Car, si l'on a $\frac{dU}{dx} = \int^{(n)}$ il en résultera : $U = \int dx \int^{(n)} = \int^{(n+1)}$

Supposons donc que l'on ait :

$$y = \int^{(n)} X\,dx^n = \frac{1}{1.2.3..n}\left[x^n\int X\,dx - \frac{n}{1}x^{n-1}\int X x\,dx + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int X x^2\,dx - \text{etc.}\right]$$

et construisons :

$$U = \frac{1}{1.2.3.(n+1)}\left[x^{n+1}\int X\,dx - \frac{n+1}{1}x^n\int X x\,dx + \frac{(n+1)n}{1.2}x^{n-1}\int X x^2\,dx - \text{etc.}\right]$$

En différentiant il viendra :

$$\frac{dU}{dx}=\frac{1}{1.2.3..\overline{(n+1)}}\left[\begin{array}{l}\overline{(n+1)}x^n\int X dx-\frac{(n+1)n}{1}x^{n-1}\int X x dx+\frac{(n+1)n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int X x^2 dx-\text{etc.}\\ +x^{n+1}X\left(1-\frac{n+1}{1}+\frac{(n+1)n}{1.2}-\right)\end{array}\right]$$

Comme d'ailleurs le coefficient de $x^{n+1}X$ représente la somme des coefficients du binôme il est nul, et l'on aura en remarquant que $n+1$ est facteur dans la première ligne :

$$\frac{dU}{dx}=\frac{1}{1.2.3..n}\left[x^n\int X dx-\frac{n}{1}x^{n-1}\int X x dx+\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int X x^2 dx\dots\text{etc.}\right]=\int^{(n)}.$$

Les quadratures simples peuvent s'en déduire en posant $n=1$.

Intégration de $\frac{d^2y}{dx^2}=f(y)$.

On aura : $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=f(y)$. Si maintenant on multiplie les deux membres par $2dy$, il viendra :

$$2\frac{dy}{dx}.d\left(\frac{dy}{dx}\right)=2fy\,dy\,;\text{ or } 2\frac{dy}{dx}d\left(\frac{dy}{dx}\right)=d\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

Il viendra donc en intégrant une première fois :

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=C_1+2\int f(y)dy$. En extrayant la racine carrée on a

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1+2\int f(y)dy}\quad\text{d'où}\quad dx=\frac{dy}{\sqrt{C_1+2\int fy\,dy}}$$

une seconde intégration donnera enfin :

$$x-C_2=\int\frac{dy}{\sqrt{C_1+2\int fy\,dy}}$$

Ce résultat démontre bien que l'intégrale contiendra deux constantes arbitraires.

Applications : $\dfrac{d^2y}{dx^2} - n^2y = 0$.

En multipliant par 2 il vient : $2\dfrac{dy}{dx}\, d\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = 2n^2 y\, dy$

d'où en intégrant $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - n^2y^2 = n^2C_1^2$ [en mettant la constante arbitraire sous la forme $n^2C_1^2$]. On en tire :

$\dfrac{dy}{dx} = n\sqrt{y^2+C_1^2}$, d'où $n\,dx = \dfrac{dy}{\sqrt{y^2+C_1^2}}$.

La seconde intégration donnera :

$nx + \log. C_2 = \int \dfrac{dy}{y^2+C^2} = \log.\left(y + \sqrt{y^2+C^2}\right)$

ou $nx = \log.\left(\dfrac{y+\sqrt{y^2+C_1^2}}{C_2}\right)$.

En passant aux nombres, on en déduit :

$y + \sqrt{y^2+C_1^2} = C_2\, e^{nx}$ (1) ; si de plus on remarque que $\left(y+\sqrt{y^2+C_1^2}\right)\left(y-\sqrt{y^2+C_1^2}\right) = C_1^2$. On en tire

$y - \sqrt{y^2+C_1^2} = \dfrac{C_1^2}{y+\sqrt{y^2+C_1^2}} = \dfrac{C_1^2}{C_2e^{nx}} = \dfrac{C_1^2}{C_2}\,e^{-nx}$ (2).

En ajoutant (1) et (2) il viendra :

$2y = C_2\, e^{nx} - \dfrac{C_1^2}{C_2}\, e^{-nx}$

d'où $y = Ae^{nx} + Be^{-nx}$ (A et B étant deux constantes évidemment arbitraires et égales l'une à $\dfrac{C_2}{2}$, l'autre à $\dfrac{C_1^2}{2\,C_2}$.)

2°. $\dfrac{d^2y}{dx^2}+n^2y=0.$

Une transformation identique donnera encore :

$$\frac{dy}{dx}=n\sqrt{C_1^2-y^2} \text{ d'où : } ndx=\frac{dy}{\sqrt{C_1^2-y^2}}=\frac{d\left(\frac{y}{C_1}\right)}{\sqrt{1-\frac{y^2}{C_1^2}}}=d\left(\text{arc.sin}\frac{y}{C_1}\right)$$

En intégrant on aura :

$$nx+C_2=\text{arc sin.}\left(\frac{y}{C_1}\right) \text{ et par suite } \frac{y}{C_1}=\sin\left(nx+C_2\right)$$

Si l'on développe on pourra encore mettre la valeur de y sous la forme $y=A\sin.nx+B\cos.nx$.

Ce second cas pouvait être facilement déduit du 1er ; car il suffit de changer n^2 en $-n^2$ ou n en $n\sqrt{-1}$

L'intégrale devient donc :

$y=Ae^{nx\sqrt{-1}}+Be^{-nx\sqrt{-1}}$, or si l'on se rappelle que

$e^{nx\sqrt{-1}}=\cos(nx)+\sqrt{-1}\sin(nx)$ et

$e^{-nx\sqrt{-1}}=\cos(nx)-\sqrt{-1}\sin(nx)$ il viendra :

$$y=A\left[\cos.(nx)+\sqrt{-1}\sin.(nx)\right]+B\left[\cos(nx)-\sqrt{-1}\sin(nx)\right]$$

$$=(A+B)\cos(nx)+\left((A-B)\sqrt{-1}\right)\sin nx=A'\cos.nx+B'\sin nx.$$

La combinaison des deux modes d'intégrations précédentes peut amener à l'intégration des équations différentielles de la forme : $\dfrac{d^ny}{dx^n}=f\left(\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right)$.

En effet, si nous posons : $\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}=z$ (1) l'équation donnée deviendra : $\dfrac{d^2z}{dx^2}=f(z)$ (2). l'équation (2) intégrée don-

-nera une relation (3) entre x et z qui contiendra deux constantes arbitraires.

Alors il se présentera deux cas : ou cette relation sera résolue par rapport à z et dans ce cas en reportant cette valeur de z dans (1), on aura à intégrer la relation $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = f_1(x)$ dans laquelle $f_1(x)$ représente une fonction de x seulement après cette substitution.

Ou enfin on ne pourra pas en tirer la valeur de z; on remarquera alors que $\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\right) = f(z)$ d'où:

$d.\left(\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\right) = f(z)dx$; d'ailleurs l'intégration de (2) donnerait:

$dx \; \frac{dz}{\sqrt{C_1 + 2\int fz dz}}$ de sorte qu'il viendra :

$d.\left(\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}\right) = \frac{fz dz}{\sqrt{C_1 + 2\int fz dz}}$ et par suite :

$$\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} = C_2 + \int \frac{fz dz}{\sqrt{C_1 + 2\int fz dz}}.$$

On continuera de la même manière en remplaçant constamment dx par sa valeur et l'on arrivera par de simples quadratures à une autre relation (4) entre y et z. En éliminant z entre (3) et (4) on aura l'intégrale cherchée. Dans l'un et l'autre cas cette équation différentielle de l'ordre $\overline{n-2}$, introduira $\overline{n-2}$ nouvelles constantes arbitraires, ce qui montre bien que le résultat définitif contiendra n constantes arbitraires.

Les équations de la forme $\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ s'intègrent d'une manière en tout analogue, car si on pose $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = z$ (1) il viendra : $\frac{dz}{dx} = f(z)$ (2) ; la seule différence qu'il y aura c'est que l'intégration de (2) se fera immédiatement par une simple quadrature. Il y aura lieu dans ce cas aux mêmes observations que précédemment.

Application à la détermination de la courbe dont le rayon de courbure est constant.

L'équation du problème sera immédiatement :

$$\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a.$$ En posant $\frac{dy}{dx} = p$, on aura :

$$\frac{\left(1+p^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = a.$$ d'où $dx = \frac{a\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}$; si maintenant on pose

$p = tg.\varphi$ il viendra $dp = \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}$ et $1+p^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi}$ d'où

$$dx = \frac{a \times \frac{d\varphi}{\cos.^2\varphi}}{\left(\frac{1}{\cos.^2\varphi}\right)^{\frac{3}{2}}} = a\cos.\varphi\,d\varphi,$$ et, par suite en intégrant

$x - C_1 = a\sin.\varphi = \frac{ap}{\sqrt{1+p^2}}$ (1) ; de plus si l'on remarque que l'on a : $dy = p\,dx$, il viendra en exprimant encore en fonction de φ $dy = \log.\varphi \times a\cos.\varphi\,d\varphi = a\sin.\varphi\,d\varphi$ d'où en intégrant : $y - C_2 = -a\cos.\varphi = -\frac{a}{\sqrt{1+p^2}}$ (2).

Il faut éliminer p entre ces deux intégrales premières générales ; on le fera en ajoutant les carrés de (1) et de (2)

ce qui donne :

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2=a^2.$$

Equation d'un cercle dont le centre est en un point quelconque. Ce résultat montre de plus que le cercle est la seule courbe qui jouisse de la propriété d'avoir sa courbure constante.

Abaissement du degré de certaines équations différentielles.

L'intégration des équations que nous venons d'apprendre à résoudre peut servir à abaisser le degré de certaines classes d'équations différentielles.

1° Lorsque l'équation différentielle ne contiendra ni y ni les $\overline{n-1}$ premières dérivées, on pourra abaisser son degré de n unités.

En effet, soit $F\left(x\,\dfrac{d^ny}{dx^n},\dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}},\dots\dfrac{d^my}{dx^m}\right)=0.$

Si l'on pose : $\dfrac{d^ny}{dx^n}=z$ on aura $\dfrac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}}=\dfrac{dz}{dx}$ et ainsi de suite jusqu'à $\dfrac{d^my}{dx^m}=\dfrac{d^{m-n}z}{dx^{m-n}}$, de telle sorte que la proposée deviendra : $F\left(x,z,\dfrac{dz}{dx},\dots\dfrac{d^{m-n}z}{dx^{m-n}}\right)=0.$ (2).

Equation dont le degré est abaissé de $\underline{n}$ unités. On se servira comme nous l'avons déjà fait de la combinaison de (1) et de (2) en ayant soin de faire les mêmes distinctions.

2°. Lorsque l'équation différentielle ne contient pas la variable indépendante, on peut toujours abaisser son degré d'une unité.

Soit donc $F\left(y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$.

on posera : $\frac{dy}{dx} = p$. on en tirera :

$$(\alpha) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = p \\ \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p. \\ \frac{d^3y}{dx^3} = p \frac{d\left(\frac{dp}{dy}\right)}{dx} + \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dp}{dx} \end{cases}$$

en considérant encore x comme fonction de fonction on aura :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = p \frac{d.\left(\frac{dp}{dy}\right)}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dp}{dy} \cdot p = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p.$$

On continuera de la même manière et il sera facile d'apercevoir que chaque dérivée s'obtient en fonction de dérivées par rapport à p dont celle qui a le degré le plus élevé est prise avec un indice moindre que le sien d'une unité. De telle sorte que l'équation à intégrer sera :

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}, p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p, \ldots\right) = 0.$$

Equation dont le degré est moindre d'une unité.

On peut remarquer que s'il manquait des dérivées on ne pourrait toujours diminuer le degré que d'une unité.

3° Lorsque l'équation différentielle est homogène par rapport à la fonction y et à toutes celles de ses dérivées qui y entrent, on peut abaisser son degré d'une unité.

En effet, dans cette hypothèse elle peut se mettre sous la forme : $\Phi\left(x, \frac{\frac{dy}{dx}}{y}, \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{y}, \ldots\right) = 0$.

Si maintenant on pose $y = e^{\int t\,dx}$ (ce qui sera toujours possible en choisissant pour t une fonction convenable) il viendra en différentiant :

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^{\int t\,dx}\cdot t\\ \frac{d^2y}{dx^2} &= e^{\int t\,dx}\left(t^2+\frac{dt}{dx}\right)\\ \frac{d^3y}{dx^3} &= e^{\int t\,dx}\left(t^3+3t\frac{dt}{dx}+\frac{d^2t}{dx^2}\right)\end{aligned}\right\}\ \text{d'où :}\ \begin{aligned}\frac{\frac{dy}{dx}}{y} &= t\\ \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{y} &= t^2+\frac{dt}{dx}\\ \frac{\frac{d^3y}{dx^3}}{y} &= t^3+3t\frac{dt}{dx}+\frac{d^2t}{dx^2}\end{aligned}$$

et ainsi de suite. L'équation proposée deviendra donc :

$$\Phi\left(x, t, t^2+\frac{dt}{dx}, t^3+3t\frac{dt}{dx}+\frac{d^2t}{dx^2}, \dots\right)=0$$

et son degré sera diminué d'une unité.

4°. Les deux méthodes précédentes combinées pourront servir à abaisser de deux unités le degré de l'équation différentielle dans le cas où elle ne renferme pas x explicitement et où elle est homogène par rapport aux indices de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$, c'est-à-dire, telle que, si on y remplace $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots$, par les lettres $p, q^2, r^3, \dots$ la transformée soit homogène, par rapport à $p, q, r, \dots$.

D'abord puisqu'elle ne contient pas x explicitement elle pourra déjà s'abaisser d'une unité en employant la série (α) déterminée dans le deuxième cas d'abaissement, et par suite se mettre sous la forme :

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}, p^2\frac{d^2p}{dy^2}+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p, \ldots\ldots\right)=0.$$

Si maintenant on remarque que les expressions $p\frac{dp}{dx}, p^2\frac{d^2p}{dy^2}+\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p, \ldots$ qui ne sont autre chose $\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots$ sont chacune homogènes par rapport à $p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2} \ldots$ et cela avec un degré d'homogénéité marqué par les indices des dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ etc.

il en résultera en vertu de la forme supposée de la fonction que cette fonction elle-même sera homogène par rapport aux mêmes quantités.

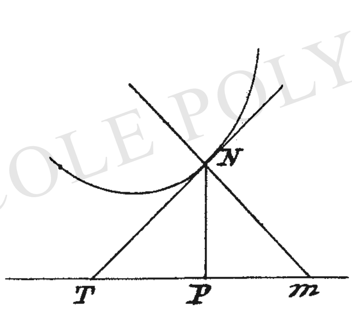
Car par hypothèse elle est homogène par rapport aux lettres p, q, r en attribuant à ces lettres des exposants marqués par les indices des dérivées qu'elles remplacent.

La transformée retombe donc par rapport à p dans le troisième cas d'abaissement et par suite pourra encore être abaissée d'une unité.

Comme application des cas d'abaissement du degré de l'équation différentielle traité dans la leçon précédente, nous traiterons les problèmes suivants.

1°. Trouver les courbes par lesquelles la normale est en rapport constant avec le rayon de courbure.

En désignant par N et ρ les normales et rayons de courbure et par <u>m</u> ce rapport constant, l'équation du problème sera : $N = m\rho$; comme d'ailleurs cette expression de N doit



toujours être positive, il en résulte que toutes les fois que ρ aura une valeur positive ou négative on devra prendre m positif ou négatif, et dans l'un ou l'autre de ces cas la courbe tournera sa convexité ou sa concavité vers l'axe des x.

Si maintenant nous remplaçons N par sa valeur

$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ et ρ par : $\dfrac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$ l'équation différentielle à résoudre sera :

$$y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}\times m.$$

Cette équation rentre dans le deuxième cas d'abaissement ; car elle ne contient pas x explicitement : on abaissera donc son degré d'une unité en posant : $\frac{dy}{dx}=p$ d'où $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dy}p$.

L'équation deviendra donc : $y\sqrt{1+p^2}=m\dfrac{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dy}p}$

ou en réduisant : $y=m\dfrac{1+p^2}{\frac{dp}{dy}p}$ équation dont le degré est abaissé d'une unité. Si maintenant on ordonne par rapport à y et à p, les variables seront séparées et l'on aura

$m.\frac{dy}{y}=\frac{p\,dp}{1+p^2}$. Cette relation s'intègre immédiatement et

donne : $\log.(y^m) = \log(\sqrt{1+p^2}) - C$. On en tire :

$\frac{\sqrt{1+p^2}}{y^m} = \frac{1}{C^m}$, [en mettant la constante arbitraire sous cette forme pour la symétrie du calcul.]. Elevant au carré, il vient : $1+p^2 = \left(\frac{y}{C}\right)^{2m}$ d'où $p = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{2m} - 1} = \frac{dy}{dx}$, les variables se séparent encore immédiatement et donnent :

$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{2m} - 1}}$. Une dernière intégration donnera :

$$x - C_1 = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^{2m} - 1}},$$ ce résultat montre bien qu'il y aura deux constantes arbitraires.

Cette quadrature ne pourra se faire que dans les cas où l'exposant ne dépassera pas deux en valeur absolue.

Examinons le cas où l'on aurait $m = +1$, dans ce cas on aura à trouver $\frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}} = dx$, en divisant par C, il viendra : $\frac{d\left(\frac{y}{C}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}} = d\left(\frac{x}{C}\right)$.

On intègre immédiatement et en mettant la constante C_1 sous la forme $\frac{\alpha}{C}$ il viendra : $\frac{y}{C} + \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1} = e^{\frac{x-\alpha}{C}}$ (1).

On en tire comme dans la leçon précédente :

$$\frac{y}{C} - \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1} = e^{-\left(\frac{x-\alpha}{C}\right)} \quad (2).$$

Ajoutant (1) et (2) il vient en divisant par 2 et chassant le dénominateur : $y = \frac{C}{2}\left[e^{\frac{x-\alpha}{C}} + e^{-\frac{x-\alpha}{C}}\right]$

On reconnait l'équation de la chainette et l'on en déduit un moyen bien simple de construire le rayon de courbure à cette courbe en son point le plus bas.

Si l'on considère le cas de $m=-1$, on retrouverait comme on pouvait le prévoir l'équation du cercle.

Les hypothèses $m=\frac{1}{2}$, $m=-\frac{1}{2}$ pourraient encore être interprétées et l'on retrouvera des propriétés géométriques de courbes déjà connues (Paraboles et Cycloïdes).

2°. Déterminer le mouvement rectiligne d'un mobile dans un milieu dont la résistance est proportionnelle à la densité et au carré de la vitesse.

L'expression de la force accélératrice sera dans ce cas: $\frac{d^2x}{dt^2}=\rho V^2$; si maintenant on remarque que la densité ρ varie avec la position du mobile on aura $\rho=f(x)$; de plus $V=\frac{dx}{dt}$ de telle sorte que l'équation différentielle sera $\frac{d^2x}{dt^2}=f(x)\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$.

Cette équation rentre dans le quatrième cas d'abaissement, on devra donc la ramener à l'équation primitive.

Posons d'abord: $\frac{dx}{dt}=p$. d'où encore: $\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{dp}{dx}p$ il viendra $p\frac{dp}{dx}=f(x)p^2$. En réduisant, il vient:

$\frac{dp}{dx}=f(x)p$. (équation homogène par rapport à p et $\frac{dp}{dx}$).

D'après la règle générale posons encore:

$p=e^{\int u dx}$ on aura en substituant $e^{\int u dx}u=f(x)e^{\int u dx}$ d'où $u=f(x)$; on en tire $p=C_1 e^{\int f(x)dx}=\frac{dx}{dt}$ et l'on voit que

le problème est résolu, car cette dernière intégration se fait immédiatement.

Intégration des Équations linéaires de tous les ordres.

On appelle équation différentielle linéaire une équation de la forme :

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + S\frac{dy}{dx} + Ty = V \quad (1),$$

dans laquelle $P, Q, \dots T, V$ sont généralement des fonctions de x.

Nous allons voir que l'intégration de (1) se trouve étroitement liée à celle de :

$$\frac{d^m y}{dx^m} + P\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + S\frac{dy}{dx} + Ty = 0 \quad (2)$$

Supposons que l'on connaisse une fonction particulière η de x qui satisfasse à (1), et u l'intégrale générale de (2). L'intégrale générale de (1) sera : $y = u + \eta$. En effet, elle contiendra d'abord m constantes arbitraires puisque u en contient m et de plus la substitution de cette valeur de y montre qu'elle satisfait à (1). Car elle donne :

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^m u}{dx^m} + P\frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + Q\frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \cdots\cdots \\ &+ \frac{d^m \eta}{dx^m} + P\frac{d^{m-1} \eta}{dx^{m-1}} + Q\frac{d^{m-2} \eta}{dx^{m-2}} + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} = V.$$

Résultat qui est évidemment identique puisque par hypothèse, la première ligne est nulle et la seconde est égale à V.

Il résulte de cette propriété de (1) que la recherche de son intégrale revient à celle de (2) et par cela même qu'il est essentiel d'étudier les propriétés de cette dernière équation.

La propriété principale dont jouit l'équation (2). C'est que si $y_1, y_2, y_3, \dots$ sont des fonctions particulières qui y satisfassent, la fonction : $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots$ (dans laquelle $C_1, C_2, C_3 \dots$ sont des constantes arbitraires) y satisfera aussi.

Pour le prouver il suffira de substituer cette fonction y dans (2), on aura en ordonnant par rapport aux constantes $C_1, C_2, C_3, \dots$

$$C_1\left(\frac{d^m y_1}{dx^n} + P\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + Q\frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \dots\right) + C_2\left(\frac{d^m y_2}{dx^m} + P\frac{d^{n-1} y_2}{dx^{m-1}} + \dots\right) + C_3\left(\frac{d^m y_3}{dx^m} + \dots\right) + \text{etc} = 0.$$

Relation qui est identiquement satisfaite.

On peut immédiatement voir que cette propriété n'appartient pas à l'équation (1). Car dans ce cas chacune des parenthèses étant égale à V, la relation deviendrait $V(C_1 + C_2 + C_3 + \dots) = V$, ce qui n'est pas possible puisqu'elle établirait une équation de condition entre les constantes arbitraires.

Il résulte de cette propriété de (2) que si on en connaissait m intégrales particulières on aurait son intégrale générale en posant :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_m y_m,$$

puisqu'elle contiendra m constantes arbitraires et qu'elle y satisfera.

Il faut toutefois remarquer que les fonctions $y_1, y_2, y_3 \ldots y_m$ doivent être par cela complètement indépendantes les unes des autres, car sans cela on n'aurait pas m constantes arbitraires.

Supposons, en effet, que l'une de ces valeurs y_i soit de la forme $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3$ la valeur de y deviendrait
$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots + (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3) C_i + \text{etc}$
expression qui se réduirait à

$$y = (C_1 + \alpha_1 C_i) y_1 + (C_2 + \alpha_2 C_i) y_2 + (C_3 + \alpha_3 C_i) y_3 + \ldots \text{etc.}$$

et ne renfermerait plus que $m-1$ constantes arbitraires.

On peut même démontrer que l'intégrale générale de (2) doit être de la forme sous laquelle nous venons de la démontrer.

En effet, puisque l'équation différentielle donnée est du degré m, son intégrale devra renfermer m constantes arbitraires et ne pourra pas en renfermer plus ; elle sera donc de la forme : $y = \varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m)$.

Or, si y_1 est une intégrale particulière de (2) elle sera d'après sa propriété principale satisfaite par :

$$y = \varphi(x, \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m) + C_1 y_1$$

Cette relation renferme $m+1$ constantes, elle devront se réduire à n et par suite φ devra contenir y_1 et cela seulement dans les termes de la forme $\alpha_1 y_1$ de telle sorte que si on le réduit avec $C_1 y_1$ la valeur de y prendra la forme

$$y = \psi(x - \alpha_2, \ldots \alpha_m) + A_1 y_1.$$

Donnons maintenant à $A_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ des valeurs telles que nous ayons une autre intégrale particulière y_2 différente de y_1 (cela pourra toujours se faire car autrement

$A_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ ne seraient plus des constantes arbitraires puisqu'on ne pourrait plus donner une valeur arbitraire à y). Pour les mêmes raisons qui précèdent l'équation (2) sera encore satisfaite par $y = \psi(x, \alpha_2 \ldots \alpha_m) + A_1 y_1 + C_2 y_2$. Il y a encore $\overline{m+1}$ constantes et comme d'ailleurs y_1 est différent de y_2 il faudra encore que ce soit un terme de ψ de la forme $\alpha_2 y_2$ qui se réduise avec $C_2 y_2$. En réduisant, y prendra la forme :

$$\chi(x_1 \ldots \alpha_m) + A_1 y_1 + A_2 y_2$$

En faisant successivement sortir de la même manière chacune des constantes, on voit bien que la valeur de y sera de la forme :

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \cdots + A_m y_m.$$

On peut au moyen de ces propriétés faire voir que ni (1) ni (2) n'admettent de solutions particulières. Car, admettons que $\eta = f(x)$ soit une solution particulière de (1), on a démontré que si $u = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \cdots$ était l'intégrale générale de (2), l'intégrale générale de (1) pourrait être mise sous la forme :

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + \cdots + A_m y_m + \eta.$$

Ce résultat montre bien que η n'est pas une solution particulière car elle se déduit de l'intégrale générale pour les valeurs nulles de $A_1, A_2, A_3 \ldots A_m$.

Comme d'ailleurs V est quelconque dans (1) il s'ensuit que la même remarque a lieu pour (2).

Non seulement on peut déterminer l'intégrale générale de (1) lorsqu'on connaît l'intégrale générale

de (2) mais encore lorsqu'on en connait une intégrale particulière, on peut abaisser le degré de (1) d'une unité

Pour le prouver, on posera $y = y_1 z$ (y_1 étant une intégrale particulière de (2)). et z une fonction de x. Si maintenant, pour faire la substitution de cette valeur de y dans (1) on se rappelle la forme générale :

$$\frac{d^m(uv)}{dx^m} = u\frac{d^m v}{dx^m} + \frac{m}{1}\cdot\frac{du}{dx}\cdot\frac{d^{m-1}v}{dx^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^2u}{dx^2}\frac{d^{m-2}v}{dx^{m-2}} + \&c\ldots$$

Il viendra en appliquant cette formule à $d(y_1 z)$ et substituant les valeurs successives $\frac{d^m(y_1 z)}{dx^m}$, $\frac{d^{m-1}(y_1 z)}{dx^{m-1}}$ ainsi obtenues .... dans (1).

$$\left.\begin{array}{l|l|l|l}
y_1\frac{d^m z}{dx^m} + \frac{m}{1}\frac{dy_1}{dx} & \frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + \frac{m(m-1)}{1.2}\frac{d^2y_1}{dx^2} & \frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \cdots \frac{d^m y_1}{dx^m} & z \\
\qquad + Py_1 & \qquad + (n-1)Q\frac{dy_1}{dx} & \qquad + P\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \\
 & \qquad + Qy_1. & \qquad + Q\frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \\
 & & \qquad + S\frac{dy_1}{dx} & \\
 & & \qquad + Ty_1 &
\end{array}\right\} = V$$

Le coefficient de z s'annulle par hypothèse, et en divisant par y_1 on aura une équation de la forme :

$$\frac{d^m z}{dx^m} + A'\frac{d^{m-1}z}{dx^{m-1}} + B'\frac{d^{m-2}z}{dx^{m-2}} + \cdots + T'\frac{dz}{dx} = V';$$

et l'on voit que si l'on pose $\frac{dz}{dx} = t$ on aura une équation linéaire et d'un degré inférieur d'une unité à celui de (1).

On a vu que si l'on connaissait m intégrales particulières et distinctes de (2) on pourrait construire son intégrale générale, on peut voir qu'il ne sera possible de trouver que m intégrales particulières distinctes; car en admettant que y_{m+1} soit une nouvelle intégrale particulière distincte, la substitution montrerait que (2) serait encore satisfaite par la valeur: $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_m y_m + C_{m+1} y_{m+1}$. Or, cette valeur contient $\overline{m+1}$ constantes arbitraires, il faut qu'elles se réduisent à m et par suite que y_{m+1} soit une fonction de la forme $a y_i + b y_{i+1} + \cdots$ qui puisse se réduire avec les termes précédents.

On peut encore remarquer que lorsque pour démontrer que l'intégrale générale de (2) est bien de la forme $A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots$ on a fait sortir toutes les constantes $a_1, a_2 \dots a_m$ du signe φ il ne restera pas une certaine fonction $\psi(x)$, c'est-à-dire, que la valeur de y ne sera pas de la forme: $y = \psi(x) + A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots + A_m y_m$. Car le raisonnement que nous venons de faire prouverait que $\psi(x)$ devrait être de la forme $a_i y_i + a_{i+1} y_{i+1} + \dots$ et par suite que le calcul n'aurait pas été bien fait car on a dû faire sortir du signe φ tous les termes de cette forme.

On a vu que lorsqu'on connaissait une intégrale particulière de (2) on pourrait abaisser le degré de (1) d'une unité, on peut encore faire voir que si l'on en connaissait deux, trois etc on pourrait abaisser le degré de (1) de deux, trois etc unités.

En effet, lorsqu'on connait une intégrale particulière y_1 de (2) on a vu qu'en posant $y = y_1 z$ on obtenait une

équation linéaire du degré $\overline{m-1}$ (3) dans laquelle la fonction principale est $u = \frac{dz}{dx}$.

On pourra en appliquant la même transformation à cette équation (3) abaisser encore son degré d'une unité lorsqu'on connaîtra une intégrale particulière u_1 de cette équation privée de second membre, car il suffit de poser $u = u_1 v$ de la même manière que dans le cas précédent.

Il s'ensuit que si l'on prouve que la connaissance d'une seconde intégrale particulière y_2 de (2) entraine celle de u_1, on aura bien fait voir que le degré de (1) a été abaissé de deux unités.

Or, par hypothèse $u = \frac{dz}{dx}$ et puisque $y = y_1 z$ on aura pour la valeur générale de u, $u = \frac{d\left(\frac{y}{y_1}\right)}{dx}$, et l'on voit que si l'on pose $y = y_2$ on aura une valeur particulière de u, $u_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx}$.

Il faut toutefois remarquer que cette valeur de u_1 ne doit pas être prise nulle, car la forme même des équations linéaires privées de second membre, montre bien qu'elles sont toutes satisfaites par la valeur nulle de la fonction, et par suite qu'une telle valeur n'apprend rien sur une équation particulière donnée.

On devra donc écarter la valeur $u_1 = 0$ ce qui donnerait $\frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = 0$ d'où $\frac{y^2}{y_1} = C$ et par suite $y_2 = C y_1$, c'est-à-dire, le cas que nous avions implicitement écarté en supposant que y_2 et y_1 étaient des intégrales particulières distinctes.

On montrerait de même que si l'on a trois intégrales

particulières de (2) on abaisse de deux unités le degré de (1), et ainsi de suite. Il en résulte que si l'on en connaissait m on pourrait effectuer l'intégration de (1) puisqu'on aurait abaissé son degré jusqu'à celui d'une équation immédiatement intégrable.

On avait montré que connaissant $y_1, y_2, \ldots y_m$ on en déduisait l'intégrale générale de (2) et par suite celle de (1) en ajoutant la connaissance d'une intégrale particulière η de cette équation; le théorème précédent prouve maintenant que la connaissance de la fonction η est intimement liée à celle de $y_1, y_2, \ldots y_m$, c'est-à-dire qu'elle est parfaitement déterminée puisque l'on peut construire l'intégrale y.

<u>Application</u>. Proposons-nous d'appliquer les résultats précédents à l'équation linéaire:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = x \ (\alpha)$. Considérons l'équation:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} + n^2 y = 0 \ (\beta)$. L'intégrale générale de (β) est connue, elle est $y = A\cos.(nx) + B\sin.(nx)$. On en tire deux intégrales particulières $y_1 = \cos.(nx)$, $y_2 = \sin.(nx)$.

Maintenant, en considérant y_1 posons $y = y_1 z = \cos.(nx)\, z$ et substituons dans (β) les valeurs de y et de:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \cos.(nx)\frac{d^2z}{dx^2} - 2n\sin(nx)\frac{dz}{dx} - n^2\cos.(nx)\,z.$$

il viendra en réduisant:

$$\cos.(nx)\frac{d^2z}{dx^2} - 2n\sin.(nx)\frac{dz}{dx} = x.$$

Si maintenant on pose $\dfrac{dz}{dx} = u$ on abaisse le degré de

cette équation d'une unité, et l'on aura :

$$\frac{du}{dx} - 2n\,tg.(nx)\,u = \frac{x}{cos.(nx)} \cdot (\mathcal{D}').$$

Cherchons u_1 pour cela appliquons la formule trouvée dans le cas général, on aura $u_1 = \frac{d\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{dx} = \frac{d\,tg(nx)}{dx} = \frac{n}{cos^2(nx)}$.

On vérifiera par une simple différentiation que c'est bien une intégrale particulière de l'équation $\mathcal{D}'$ privée de second membre.

Posons enfin : $u = u_1 t$ et substituons dans $(\mathcal{D}')$ il viendra :

$$u_1\frac{dt}{dx} + \left(\frac{du_1}{dx} - 2n\,tg.(nx)\,u_1\right)t = \frac{x}{cos.(nx)}.$$

ou $u_1\frac{dt}{dx} = \frac{x}{cos.(nx)}$ en remplaçant u_1 par sa valeur, on en tire $dt = \frac{1}{n}x\,cos.(nx)\,dx$. En intégrant, il viendra :

$$t = C_1 + \frac{1}{n}\int x\,cos.(nx)\,dx.$$

Cette intégrale se trouve en intégrant par parties et donne :

$$t = C_1 + \frac{x\,sin(nx)}{n^2} + \frac{cos.(nx)}{n^3}.$$

Il est facile de remonter de cette valeur à la valeur cherchée de y, car on a :

$$u = u_1 t = \frac{n\,C_1}{cos.^3(nx)} + \frac{1}{n}\cdot\frac{x\,sin.(nx)}{cos.^2(nx)} + \frac{1}{n^2}cos.(nx)$$

et puisque : $\frac{dz}{dx} = u$, on en tire $z = \int u\,dx$, ou au moyen de la relation précédente :

$$z = \frac{nC_1}{n}\int\frac{n\,dx}{cos.^2(nx)} + \frac{1}{n^2}\int\frac{x\,sin(nx)\,n\,dx}{cos^2(nx)} + \frac{1}{n^2}\int\frac{dx}{cos.(nx)} + C_2.$$

or $\int\frac{n\,dx}{cos.^2(nx)} = tg.(nx)$

et $\frac{1}{n^2}\int \frac{x \sin.(nx) n dx}{\cos.^2(nx)} = \frac{1}{n^2}\int x \frac{-d\cos.(nx)}{\cos.^2(nx)} = \frac{1}{n^2}\int x d.\left(\frac{1}{\cos(nx)}\right)$

Si l'on intègre par parties, on aura :

$$\frac{1}{n^2}\int x d.\left(\frac{1}{\cos.(nx)}\right) = \frac{x}{n^2\cos.(nx)} - \frac{1}{n^2}\int\frac{dx}{\cos.(nx)} -$$

Substituant les valeurs de ces deux intégrales dans la valeur de z, il vient :

$$z = C_1\, tg.(nx) + \frac{x}{n^2\cos(nx)} + C_2$$

Enfin, on a : $y = y_1 z = \cos(xz) z$, d'où pour l'intégrale générale :

$$y = C_1 \sin.(xz) + C_2 \cos.(nx) + \frac{x}{n^2}.$$

On voit aisément que telle est bien l'intégrale générale cherchée car $C_1 \sin.(nx) + C_2 \cos.(nx)$ constituent l'intégrale générale de cette équation privée de second membre et $\frac{x}{n^2}$ est une intégrale particulière évidente de l'équation différentielle donnée.

Les résultats précédents peuvent encore montrer que l'intégrale générale de l'équation linéaire privée de second membre est bien de la forme ci-dessus démontrée.

En effet, admettons que l'équation du degré $\overline{m-1}$, c'est-à-dire, l'équation en u soit telle que son intégrale générale ait la forme $u = A_2 u_1 + A_3 u_2 + \dots + A_m u_{m-1}$.

Nous allons faire voir que celles du degré m aura la même forme. Et comme d'ailleurs, nous connaissons directement l'intégrale de $\frac{dy}{dx} + Py = 0$ qui donne $y = Cy_1$ en posant $y_1 = C_1 e^{\int P dx}$ on en conclura en remontant que

toute équation linéaire a son intégrale générale de cette forme.

Or, nous avons :

$$z=\int u\,dx+A_1=A_1+A_2\int u_1\,dx+A_3\int u_2\,dx+\cdots+A_m\int u_{m-1}\,dx,$$

et comme $y=y_1 z$, on aura enfin :

$$y=A_1 y_1+A_2 y_1\int u_1\,dx+A_3 y_1\int u_2\,dx+\cdots+A_m y_n\int u_{m-1}\,dx,$$

ce qu'il fallait trouver car chacun des coefficients représentant $A_2, A_3, \ldots$ constitue bien une intégrale particulière puisque $y_1\int u_1\,dx$, par exemple, pourra se déduire en posant $A_2=1$ et les autres constantes nulles.

On a pu, dès à present, remarquer l'analogie de ces équations linéaires avec les équations algébriques ; elle se confirme encore si l'on considère le résultat obtenu à la fin de la leçon précédente, par la substitution de $y=y_1 z$ dans la proposée : On verra que la disparition du 2^e, du 3^e... terme dépend de la résolution d'une équation différentielle du 1er, du 2^e... ordre.

Puisque la difficulté se trouve abaissée lorsqu'on connait des intégrales particulières de (2), nous allons chercher le cas où l'on peut en déterminer.

Remarquons pour cela que cette équation (2) est homogène par rapport à y et à ses dérivées on l'abaissera donc d'une unité en posant : $y=e^{\int t\,dx}$ On en tire :

$$\frac{dy}{dx}=e^{\int t\,dx}.\,t,\quad \frac{d^2y}{dx^2}=e^{\int t\,dx}\left[t^2+\frac{dt}{dx}\right],\quad \frac{d^3y}{dx^3}=e^{\int t\,dx}\left[\frac{d^2t}{dx^2}+3t\frac{dt}{dx}+t^3\right]$$

et ainsi de suite.

L'inspection de la forme de ces relations comparées à celle de l'équation linéaire donnée, montre bien que la substitution donnera un résultat de la forme :

$$\Phi\left[\frac{dt}{dx}, \frac{d^2t}{dx^2}+3t\frac{dt}{dx}\cdots\frac{d^{m-1}t}{dx^{m-1}}\right]+\left(t^m+Pt^{m-1}+Qt^{m-2}+\cdots+St+T\right)=0.$$

On voit alors que toutes les fois que l'on pourra satisfaire à la relation : $t^m+Pt^{m-1}+Qt^{m-2}+\cdots+St+T=0$ (3) par une valeur constante de t, la proposée sera aussi satisfaite car toutes les dérivées étant nulles Φ le sera aussi : supposons que t_1 soit une de ces valeurs, la valeur correspondante de y sera : $y=e^{\int t_1 dx}=e^{t_1x}$

Dans le cas où les coefficients $P, Q, .. T$ de l'équation (2) sont constants, toutes les racines de (3) sont constantes et si elles sont toutes inégales on en tirera l'intégrale générale :

$$y=C_1e^{t_1x}+C_2e^{t_2x}+\cdots+C_me^{t_mx}$$

puisque l'on aura m intégrales particulières.

Dans le cas où l'équation a des coefficients constants, on a vu que les intégrales particulières étaient de la forme e^{rx}. Si l'on substitue dans l'équation linéaire privée de deuxième membre la valeur $y=e^{rx}$ on aura pour résultat :

$$e^{rx}\left[r^m+Pr^{m-1}+Qr^{m-2}+\cdots+Sr+T\right]=0,$$

relation qui s'exprimera identiquement par :

(α) $\varphi(e^{rx})=e^{rx}F(r)$, en désignant par $\varphi(y)$ le premier membre de l'équation et par $F(r)$ le polynôme

$$r^m+Pr^{m-1}+Qr^{m-2}+\cdots+Sr+T.$$

Cela posé, établissons d'abord une propriété remarquable de la fonction φ : elle est telle que l'on a :

$$\frac{d}{dr}\varphi(y) = \varphi\left(\frac{dy}{dr}\right).$$

Pour le montrer, il suffit de différentier le premier membre par rapport à r, on a ainsi :

$$\frac{d}{dr}\varphi(y) = \frac{d.}{dr}\cdot\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right) + P\frac{d.}{dr}\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right) + \cdots\cdots = 0,$$

ou en intervertissant l'ordre des différentiations

$$\frac{d}{dr}\varphi(y) \equiv \frac{d^m\left(\frac{dy}{dr}\right)}{dx^m} + P\frac{d^{m-1}\left(\frac{dy}{dr}\right)}{dx^{m-1}} + \cdots = \varphi\left(\frac{dy}{dr}\right).$$

En opérant de la même manière, on démontre que

$$\frac{d^2}{dr^2}\varphi(y) = \varphi\left(\frac{d^2y}{dr^2}\right)$$

$$\frac{d^3}{dr^3}\varphi(y) = \varphi\left(\frac{d^3y}{dr^3}\right)$$ et ainsi de suite.

Appliquons ces résultats à la relation (α) déterminée précédemment, il viendra identiquement :

$$\varphi\left(\frac{d}{dr}(e^{rx})\right] = \left[\varphi(xe^{rx}) = \frac{d}{dr}\varphi(e^{rx}) = \frac{d}{dr}(e^{rx}.F(r)) = e^{rx}\left[xF(r) + F'(r)\right]\ (\beta).$$

De même

$$\varphi(e^{rx}.x^2) = e^{rx}\left[x^2F(r) + 2xF'(r) + F''(r)\right]\ (\gamma),$$

et ainsi de suite.

On voit alors facilement qu'une racine multiple donne un nombre d'intégrales particulières égales au degré de son indice de multiplicité.

En effet, si r_1 est une racine simple $F(r_1)=0$ et la relation (α) indique que $e^{r_1 x}$ sera une intégrale particulière.

Si r_1 est une racine double, on a $F(r_1)=0$ et $F'(r_1)=0$, la relation (β) indique que $x\,e^{r_1 x}$ donne une nouvelle intégrale particulière. La relation (γ) indiquerait de même que si r_1 était une racine triple, on aurait une nouvelle intégrale particulière égale à $x^2 e^{r_1 x}$ et ainsi de suite.

Ces raisonnements indiquent donc bien que le cas des racines égales ne fait pas exception puisque l'on a toujours dans ce cas un nombre d'intégrales particulières égale au degré de l'équation $F(r)=0$ et par suite de l'équation différentielle donnée.

Il peut enfin se faire que l'équation $F(r)=0$ ait des racines imaginaires, ce cas ne fait pas exception, mais on peut vouloir faire disparaître les quantités imaginaires.

Pour cela, il suffit de remarquer que si l'on a une racine imaginaire de la forme : $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, on trouvera aussi sa conjuguée de la forme $\alpha-\beta\sqrt{-1}$ de telle sorte que l'intégrale générale renfermera deux termes tels que :

$$C_1 e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})x} + C_2 e^{(\alpha-\beta\sqrt{-1})x}$$

Or,

$$C_1 e^{(\alpha+\beta\sqrt{-1})x} = C_1 e^{\alpha x} e^{\beta x\sqrt{-1}} = C_1 e^{\alpha x}\left[\cos.\beta x+\sqrt{-1}\,\sin.\beta x\right]$$

$$C_2 e^{(\alpha-\beta\sqrt{-1})x} = C_2 e^{\alpha x-\beta x\sqrt{-1}} = C_2 e^{\alpha x}\left[\cos\beta x-\sqrt{-1}\,\sin.\beta x\right]$$

de sorte que leur somme deviendra en ordonnant :

$e^{\alpha x}\left[\cos.\beta x\,(C_1+C_2)+\sin.\beta x\,(C_1-C_2)\sqrt{-1}\right]$

ou comme C_1+C_2 et $(C_1-C_2)\sqrt{-1}$ sont des constantes arbitraires : $e^{\alpha x}\left(A\cos.(\beta x)+B\sin.(\beta x)\right)$.

Nous voyons que dans le cas des coefficients constants on peut déterminer entièrement l'intégrale générale de l'équation privée de second membre : si maintenant on suppose que le second membre soit égal à V (fonction de x il suffira de connaître l'intégrale particulière η pour avoir l'intégrale générale.

Procédons à cet à la recherche de cette intégrale η dans quelques cas particuliers.

1° Supposons d'abord que V soit un polynome algébrique de la forme : $a_0x^p+a_1x^{p-1}+a_2x^{p-2}+\ldots+a_{p-1}x+a_p$.

Dans ce cas on pourra avoir une intégrale particulière en posant : $y=A_0x^p+A_1x^{p-1}+\ldots+A_p$.

Car si l'on remarque que toutes les dérivées de y seront des polynômes algébriques de même forme et seulement de degrés diminuant à chaque fois d'une unité, il en résultera que la substitution de cette valeur dans l'équation différentielle donnera un polynôme algébrique du degré p. Alors, pour déterminer $A_0, A_1\ldots A_p$, il suffira d'identifier les coefficients des différentes puissances de x à $a_0, a_1, \ldots a_p$.

D'ailleurs, aucune de ces valeurs de $A_0, A_1\ldots A_p$ ne sera infinie ; car on voit que dans la substitution de la valeur de y chacune de ces lettres aura pour coefficient

le coefficient de la lettre y quel'on peut toujours supposer ne pas être nulle. Car dans ce cas en posant $\frac{dy}{dx} = z$ on retomberait sur une équation d'un degré inférieur d'une unité et dont le coefficient de z ne serait pas nul

2°. Si V est de la forme $a e^{\mu x}$ on pourra poser $\eta = A e^{\mu x}$.

On aura identiquement d'après ce que nous avons vu :

$\varphi(A e^{\mu x}) = A F(\mu) e^{\mu x}$ et par suite on devra avoir :

$A F(\mu) e^{\mu x} = a e^{\mu x}$. L'identification donnera : $A = \frac{a}{F(\mu)}$;

il se présente un cas d'exception, car si l'on a $F(\mu) = 0$ c'est-à-dire si μ est une racine simple de $F(\mu)$ la valeur de A sera infinie.

Dans ce cas, on prendra $\eta = A x e^{\mu x}$ et, il viendra :

$$\varphi(A x e^{\mu x}) = A e^{\mu x}\left[x F(\mu) + F'\mu\right] = a e^{\mu x}.$$

En observant alors que $F(\mu) = 0$ et identifiant, on aura :

$A F'(\mu) = a$ d'où : $A = \frac{a}{F'(\mu)}$, il y aurait encore lieu à un même cas d'exception pour $F'(\mu) = 0$ en même temps que $F(\mu) = 0$; alors μ serait une racine double et en ayant égard à la relation (γ) précédemment déterminée on éluderait cette exception comme précédemment.

3°. Si V était de la forme $a e^{\mu x} + b e^{\nu x}$; ce cas se ramènerait facilement au cas précédent, car il suffit de poser $\eta = A e^{\mu x} + B e^{\nu x}$; la substitution de cette fonction donnera :

$$A F(\mu) e^{\mu x} + B F(\nu) e^{\nu x} = a e^{\mu x} + b e^{\nu x}.$$

Relation que l'on pourra satisfaire identiquement en posant $AF(\mu)=a$ et $BF(V)=b$.

Ces résultats sont de la même forme que celui du cas précédent ; ils donneront donc lieu aux mêmes observations.

4°. Supposons enfin que V soit de la forme :

$a\cos.(nx)+b\sin.(nx)$.

Si l'on pose $y=A\cos.(nx)+B\sin.(nx)$, on aura :

$\frac{dy}{dx}=-An\sin(nx)+Bn\cos.(nx)$ et ainsi de suite ; toutes les dérivées seront de cette forme de telle sorte que le résultat de la substitution de cette valeur de y dans l'équation différentielle sera de la forme :

$$(AG+BH)\cos.(nx)+(AK+BL)\sin.(nx)=a\cos.(nx)+b\sin(nx).$$

L'identification donnera : $\begin{cases}AG+BH=a\\ AK+BL=b\end{cases}$ et ces deux équations serviront à déterminer A et B.

Il y a un cas d'exception c'est celui où le dénominateur commun de ces valeurs de A et de B ainsi déterminé sera nul.

Dans ce cas, on convertira les lignes trigonométriques en exponentielles au moyen des formules connues : on retombera ainsi dans le cas précédent qui est aussi sujet à une exception que l'on sait lever.

Or, on a :

$$\cos.(nx)=\frac{1}{2}\left[e^{nx\sqrt{-1}}+e^{-nx\sqrt{-1}}\right]$$

$$\sin.(nx)=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[e^{nx\sqrt{-1}}-e^{-nx\sqrt{-1}}\right]$$

la valeur de V sera alors :

$$V=\left[\frac{a}{2}+\frac{b}{2\sqrt{-1}}\right]e^{nx\sqrt{-1}}+\left[\frac{a}{2}-\frac{b}{2\sqrt{-1}}\right]e^{-nx\sqrt{-1}}$$

et l'on posera comme précédemment :

$$\eta=\left(\frac{A}{2}+\frac{B}{2\sqrt{-1}}\right)e^{nx\sqrt{-1}}+\left[\frac{A}{2}-\frac{B}{2\sqrt{-1}}\right]e^{-nx\sqrt{-1}}$$

Il faudra alors d'après la règle poser :

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{b}{2\sqrt{-1}}\right)=\left[\frac{A}{2}+\frac{B}{2\sqrt{-1}}\right]F(n\sqrt{-1})$$

et $\left(\frac{a}{2}-\frac{b}{2\sqrt{-1}}\right)=\left[\frac{A}{2}-\frac{B}{2\sqrt{-1}}\right]F(-n\sqrt{-1})$.

Il est d'ailleurs évident qu'il suffit de déterminer les valeurs de A et de B satisfaisant à l'une de ces deux relations puisqu'elles ne diffèrent que par le signe de $\sqrt{-1}$ et qu'on obtient les deux relations suivantes (en ajoutant entre elles les parties réelles et les parties imaginaires).

Cela posé, observons que $F(n\sqrt{-1})$ est de la forme : $M+N\sqrt{-1}$ de sorte que l'on devra avoir identiquement :

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{2\sqrt{-1}}=\left[\frac{A}{2}+\frac{B}{2\sqrt{-1}}\right]\left[M+N\sqrt{-1}\right]$$

ce qui donne les deux relations :

$$AM+BN=a$$
$$AN-BN=-b.$$

Il y aura un cas d'exception lorsque le dénominateur commun sera nul, c'est-à-dire lorsqu'on aura : $M^2+N^2=0$ ce qui donne $M=0$, $N=0$ et par suite $F(n\sqrt{-1})=0$, ce qui est bien le cas d'exception déjà signalé.

Il faudra alors poser :

$$\eta = \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2\sqrt{-1}}\right) x e^{nx\sqrt{-1}} + \left[\frac{A}{2} - \frac{B}{2\sqrt{-1}}\right] x e^{-nx\sqrt{-1}}$$

ou ce qui revient au même à poser

$$\eta = A' x \cos(nx) + B' x \sin.(nx).$$

Appliquons ces résultats à l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = \cos.(nx) + \sin.(nx).$$

On a trouvé pour l'intégrale générale de $\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 y = 0$.

$$y = C_1 \cos(ax) + C_2 \sin(ax).$$

Cherchons η et pour cela posons $\eta = A\cos(nx) + B\sin(nx)$

on en tire $\frac{d\eta}{dx} = -An\sin(nx) + nB\cos(nx)$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} = -An^2\cos.(nx) - Bn^2\sin(nx).$$

en substituant, il viendra :

$$A(a^2-n^2)\cos.(nx) + B(a^2-n^2)\sin.(nx) = \cos.(nx) + \sin(nx)$$

d'où en identifiant $A = \frac{1}{a^2-n^2}$, $B = \frac{1}{a^2-n^2}$.

On examinera comme précédemment le cas où l'on aurait $n = \pm a$ et on l'éludera en posant :

$$\eta = Ax\cos(nx) + Bx\sin.(nx).$$

Dans le cas où les coefficients de l'équation $\varphi(y) = 0$ sont constants, on a dit que l'intégrale générale était :

$$y = A_1 e^{z_1 x} + A_2 e^{z_2 x} + A_3 e^{z_3 x} + \dots + A_m e^{r_m x}$$

Il est vrai que cette valeur de y satisfait bien à l'équation différentielle, mais il faut encore montrer que les constantes

$A_1, A_2, \ldots A_m$ sont bien des constantes arbitraires, c'est-à-dire, qu'elles satisfont à la condition essentielle d'être telles que pour une valeur déterminée de $x = \alpha$, on peut attribuer à y et à ses $\overline{m-1}$ 1ères dérivées des valeurs arbitraires $b, b', b'', \ldots b^{(m-1)}$.

Nous allons d'abord faire voir que cette condition est satisfaite pour la valeur particulière de $x = 0$ et nous en déduirons le cas d'une valeur quelconque de $x = \alpha$.

Les différentiations successives de la valeur de y donnent:

$$\frac{dy}{dx} = A_1 r_1 e^{r_1 x} + A_2 r_2 e^{r_2 x} + \cdots + A_m r_m e^{r_m x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = A_1 r_1^2 e^{r_1 x} + A_2 r^2 e^{r_2 x} + \cdots + A_m r_m^2 e^{r_m x}$$

. . . .

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = A_1 r_1^{m-1} e^{r_1 x} + A_2 r^{m-1} e^{r_2 x} + \cdots + A_m r_m^{m-1} e^{r_m x}$$

Si maintenant on pose $x = 0$ et $y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ égales à $b, b', \ldots b^{(m-1)}$, on aura la suite des relations:

$$\begin{array}{l|l} K(m-1) & b = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots\cdots\cdots + A_m \\ K(m-2) & b' = A_1 r_1 + A_2 r_2 + A_3 r_3 + \cdots\cdots\cdots + A_m r_m \\ K(m-3) & b'' = A_1 r_1^2 + A_2 r_2^2 + A_3 r_3^2 + \cdots\cdots\cdots + A_m r_m^2 \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 1 & b^{(m-1)} = A_1 r_1^{m-1} + A_2 r_2^{m-1} + \cdots\cdots\cdots + A_m r_m^{m-1} \end{array}$$

On a ainsi m équations au moyen desquelles nous allons faire voir qu'il sera possible de déterminer des valeurs de $A_1, A_2, \ldots A_m$ correspondant aux valeurs arbitraires: $b, b', b'', \ldots\ldots\ldots b^{(m-1)}$.

Employons la méthode des coefficients indéterminés et pour cela multiplions chacune de ces équations successivement par les facteurs indéterminés $K_{(m-1)}, K_{(m-2)} \ldots K_1\ 1$ Il viendra en ajoutant ces différentes équations ainsi modifiées

$$b^{(m-1)} + K_1 b^{(m-2)} + \cdots + K_{(m-2)} b' + K_{(m-1)} b = A_1 \varphi(r_1) + A_2 \varphi(r_2) + \cdots + A_m \varphi(r_m)$$

en posant :

$$\varphi(r) = r^{m-1} + K_1 r^{m-2} + \cdots + K_{(m-2)} r + K_{(m-1)}$$

Si maintenant on pose : $\varphi(r_2)=0,\ \varphi(r_3)=0 \cdots \varphi(r_m)=0$

on aura :

$$A_1 = \frac{b^{(m-1)} + K_1 b^{(m-2)} + \cdots + K_{(m-2)} b' + K_{(m-1)} b}{\varphi(r_1)}.$$

et les $\overline{m-1}$ coefficients indéterminés $K_{(m-1)}, K_{(m-2)} \ldots K_1$

devraient être déterminés par les $\overline{m-1}$ relations de conditions $\varphi(r_2)=0,\ \varphi(r_3)=0 \cdots \varphi(r_m)=0.$

Or, on peut y arriver beaucoup plus simplement, si l'on remarque que ces $\overline{m-1}$ relations expriment que $r_2, r_3, \ldots r_m$ sont des racines de $\varphi(r)$ et que par conséquent :

$$\varphi(r) = (r-r_2)(r-r_3) \cdots (r-r_m).$$

D'ailleurs, par hypothèse, $r_1, r_2, r_3, \ldots r_m$ sont les racines de l'équation $F(r)=0$, on aura donc identiquement :

$\varphi(r) = \dfrac{F(r)}{r-r_1}$ ou en remplaçant $\varphi(r)$ par sa valeur :

$$r^{m-1} + K_1 r^{m-2} + \cdots + K_{(m-2)} r + K_{(m-1)} = \frac{F(r)}{r-r_1}.$$

Ce résultat montre alors que pour avoir les différents facteurs $K_1 \ldots K_{(m-2)}, K_{(m-1)}$ il suffira d'effectuer le quotient

$\dfrac{E(r)}{r-r_1}$ et de prendre les coefficients des puissances successives r^{m-1}, r^{m-2} ..... etc. on remarquera qu'ils sont ainsi parfaitement déterminés.

On peut encore remarquer que l'on aura :

$$\varphi(r_1) = \frac{F(r)}{r-r_1} \text{ pour } r = r_1 = F'(r_1)$$

de telle sorte que la valeur de A_1 deviendra :

$$A_1 = \frac{b^{(m-1)} + K\, b^{(m-2)} + \dots + K_{(m-2)}\, b' + K_{(m-1)}\, b}{F'(r_1)}.$$

Comme d'ailleurs la forme prise pour l'intégrale générale indique que l'on ne suppose pas de racines égales à $F(r)$, $F'(r)$ ne sera pas nulle et la valeur de A_1 sera entièrement déterminée.

On opérerait identiquement de la même manière pour $A_2, A_3, \dots\dots A_m$.

Considérons maintenant le cas de la valeur quelconque de $x = \alpha$.

Il est facile de voir que la valeur de y peut se mettre sous la forme :

$$y = A_1 e^{r_1\alpha} . e^{r_1(x-\alpha)} + A_2 e^{r_2\alpha} . e^{r_2(x-\alpha)} + \dots + A_m e^{r_m\alpha} . e^{r_m(x-\alpha)}$$

ou comme $A_1 e^{r_1\alpha}, A_2 e^{r_2\alpha}, \dots\dots A_m e^{r_m\alpha}$

sont encore des constantes arbitraires.

$$y = A'_1 e^{r_1(x-\alpha)} + A'_2 e^{r_2(x-\alpha)} + \dots\dots + A'_m e^{r_m(x-\alpha)}$$

On voit alors que si on fait $x = \alpha$ et $y = b$ on aura la même relation $b = A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots\dots + A'_m$, et il est facile de voir qu'il en serait de même pour $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \dots \dfrac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$.

de telle sorte que la relation de ces équations sera identique à celle du cas de $x=0$.

Il faut remarquer que le raisonnement exposé précédemment n'exige en aucune manière que les coefficients de l'équation soient constants, il s'appliquerait également au cas où les coefficients seraient variables.

Il s'appliquera même encore au cas où l'équation n'aura pas son second membre nul, car dans ce cas l'intégrale générale sera : $y=u+\eta$. D'où on tirera :
$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}+\eta'$ et ainsi de suite. Ces relations peuvent être mises sous la forme :

$$y-\eta=u,\ \frac{dy}{dx}-\eta'=\frac{du}{dx} \text{ etc.}$$

Si maintenant avec $x=\alpha$ on pose $y=b$, $\frac{dy}{dx}=b'$ etc, on aura dans les premiers membres $b-\eta$, $b'-\eta'$ etc. qui seront encore des valeurs numériques arbitraires et l'on retombera dans le premier cas puisqu'il suffira de déterminer $A_1, A_2, \dots A_m$ de telle manière que u, $\frac{du}{dx}$ ... etc aient des valeurs arbitraires $b-\eta$, $b'-\eta'$ ... etc.

Appliquons ces résultats à l'équation :

$$\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0. \left[P \text{ et } Q \text{ étant des coefficients constants}\right].$$

En posant $y=e^{rx}$, il viendra $r^2+Pr+Q=0$, et si r_1 et r_2 sont les racines de cette équation, l'intégrale générale sera :

$$y=A_1e^{r_1x}+A_2e^{r_2x}.$$

Maintenant pour déterminer les constantes, on aura en appliquant la méthode générale les relations :

$$\begin{cases} b = A_1 + A_2 \\ b' = A_1 r_1 + A_2 r_2 \end{cases} \quad \text{d'où}: \quad \begin{cases} A_1 = \dfrac{b r_2 - b'}{r_2 - r} \\ A_2 = \dfrac{b' - b r}{r_2 - r_1} \end{cases}$$

de telle sorte que la valeur de y deviendra:

$$y = \frac{b r_2 - b'}{r_2 - r_1} e^{r_1 x} + \frac{b' - b r_1}{r_2 - r_1} e^{r_2 x}.$$

Dans le cas où les racines seraient égales, la méthode ne donnerait rien sous cette forme, mais on peut obtenir le résultat en ordonnant la valeur de y par rapport à b et b', c'est-à-dire, en la mettant sous la forme:

$$y = b \frac{r_2 e^{r_1 x} - r_1 e^{r_2 x}}{r_2 - r_1} - b' \frac{e^{r_1 x} - e^{r_2 x}}{r_2 - r_1}$$

Car si l'on fait $r_2 = r_1$ chacun de ces termes se présente sous la forme $\frac{0}{0}$ et on lèvera l'indétermination par le procédé connu, ce qui donnera: $y = b e^{r_1 x} - x e^{r_1 x} (b r_1 - b')$.

On pourra vérifier, en tenant compte de la condition d'égalité des racines, que cette valeur de y satisfait bien à la proposée.

Connaissant l'intégrale générale de l'équation précédente, nous pourrons trouver celle de:

$\dfrac{d^2 y}{dx^2} + P \dfrac{dy}{dx} + Q y = X$ par les abaissements successifs, en posant $y = z y$ et $\dfrac{dz}{dx} = u$ on la ramènera par la méthode générale à une équation de la forme:

$\dfrac{du}{dx} + P' u = \dfrac{X}{y_1}$; d'ailleurs on sait que connaissant y_2 on aura u_1 de telle sorte qu'en posant $u = u_1 t$ il viendra:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{X}{u_1 y_1}. \text{ d'où}$$

$$t = C_2 + \int \frac{X}{u_1 y_1} dx, \text{ on en déduira :}$$

$$u = u_1 t = C_2 u_1 + u_1 \int \frac{X}{u_1 y_1} dx$$

or $z = \int u dx + C_1$ puisque $\frac{dz}{dx} = u$, il viendra donc :

$$z = C_1 + C_2 \int u_1 dx + \int u_1 dx \int \frac{X}{u_1 y_1} dx$$

et enfin

$$y = y_1 z = C_1 y_1 + C_2 y_1 \int u_1 dx + y_1 \int u_1 dx \int \frac{X}{u_1 y_1} dx,$$

expression qui ne renferme que des quadratures.

Intégration par séries.

Nous avons vu que l'on pouvait toujours faire disparaître le second terme d'une équation par l'intégration d'une équation différentielle du premier ordre privée de deuxième membre de telle sorte que l'équation linéaire du deuxième ordre privée de membre pourra toujours être ramenée à la forme : $\frac{d^2z}{dx^2} = Rz$; c'est cette équation que nous allons intégrer par séries.

Pour cela, imaginons les valeurs de z développées et posons $z = p_0 + p_1 + p_2 + \cdots\cdots + p_n$ (1) on en tirera : $\frac{dz}{dx} = \frac{dp_0}{dx} + \frac{dp_1}{dx} + \frac{dp_2}{dx} + \cdots\cdots + \frac{dp_n}{dx}$ (2) et

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{d^2p_0}{dx^2} + \frac{d^2p_1}{dx^2} + \frac{d^2p_2}{dx^2} + \cdots\cdots + \frac{d^2p_n}{dx^2} \quad (3).$$

de telle sorte que l'équation différentielle proposée deviendra :

$$\frac{d^2p_0}{dx^2}+\frac{d^2p_1}{dx^2}+\frac{d^2p_2}{dx^2}+\dots+\frac{d^2p_n}{dx^2}=Rp_0+Rp_1+Rp_2+\dots+Rp_n$$

relation à laquelle nous pourrons satisfaire en posant

$$\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{d^2p_0}{dx^2}=0 & (1)\\[2ex] \dfrac{d^2p_1}{dx^2}=Rp_0 & (2)\\[2ex] \dots\dots\dots\dots & \\[2ex] \dfrac{d^2p_n}{dx^2}=Rp_{n-1} & (n).\end{array}\right.$$

en remarquant toutefois que l'on néglige pour le moment Rp_n.

En intégrant ces équations de $x=\alpha$ à $x=x$, la première donne : $p_0=C+C_1(x-\alpha)$ ou $p_0=b+b'(x-\alpha)$, en assujettissant p_0 et $\frac{dp_0}{dx}$ à avoir pour $x=\alpha$ les mêmes valeurs que z et $\frac{dz}{dx}$, b et b'.

On voit ensuite que comme pour $x=\alpha$

$$p_0+p_1+p_2+\dots\dots\dots+p_n=b$$

$$\frac{dp_0}{dx}+\frac{dp_1}{dx}+\dots\dots\dots+\frac{dp_n}{dx}=b'$$

et que l'on a pris : $p_0=b$ et $\frac{dp_0}{dx}=b'$ il sera permis de prendre pour $x=\alpha$:

$p_1 = 0,\ p_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p_n = 0$; et

$$\frac{dp_1}{dx} = 0,\ \frac{dp_2}{dx} = 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dp_n}{dx} = 0.$$

Cela posé, en continuant à intégrer dans les mêmes limites, la relation (2) donnera :

$$\frac{dp_1}{dx} = \int_\alpha^x R\,p_0\,dx, \text{ puis } p_1 = \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,p_0\,dx.$$

La relation (3) donnera :

$$p_2 = \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,p_1\,dx = \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,dx \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,p_0\,dx.$$

On trouverait de même :

$$p_3 = \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,dx \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,dx \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,p_0\,dx,$$

et ainsi de suite, la loi est très facile à reconnaître.

Et la valeur de z deviendra :

$$z = p_0 + \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,p_0\,dx + \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,dx \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x R\,p_0\,dx + \text{etc.}$$

Il reste à faire voir que cette série est convergente.

Admettons pour cela que x varie d'une manière continue de $x = \alpha$ à $x = x$, que R varie aussi d'une manière continue et que M soit sa valeur maximum entre ces mêmes limites ; admettons enfin qu'entre les limites considérées p_0 ait C pour valeur maximum.

D'après ces hypothèses, on aura évidemment :

$$p_1 < CM \int_\alpha^x dx \int_\alpha^x dx \text{ ou } < CM \frac{(x-\alpha)^2}{1.2}$$

de même

$$p_2 < CM^2 \frac{(x-\alpha)^4}{1.2.3.4}$$ et en continuant :

$$p_n < CM^n \frac{(x-\alpha)^{2n}}{1.2.3..2n}$$

On voit ainsi que chacun des termes de la série ainsi obtenue est plus petit qu'un terme correspondant de la série

$$C + CM\frac{(x-\alpha)^2}{1.2} + CM^2\frac{(x-\alpha)^4}{1.2.3.4} + \ldots + CM^n\frac{(x-\alpha)^{2n}}{1.2.3..2n}$$

et si l'on fait voir que cette dernière série est convergente, il sera par cela même prouvé que la première l'est aussi.

Or, deux termes consécutifs de cette série sont :

$$CM^{(n-1)} \times \frac{(x-\alpha)^{2(n-1)}}{1.2.3\ldots2(n-1)} \text{ et } CM^n\frac{(x-\alpha)^{2n}}{1.2.3..2n}$$ dont le rapport $\frac{M(x-\alpha)^2}{(2n-1).2n}$ peut devenir aussi petit que l'on voudra à mesure que n augmente ; ce qui est la condition de convergence de la série.

Il faut enfin remarquer que dans la substitution de la valeur de z dans l'équation différentielle donnée on a négligé le terme $R.p_n$. Ce terme peut devenir aussi petit que l'on voudra car il est plus petit que $M p_n$ et p_n peut devenir aussi petit que l'on voudra. Il constitue d'ailleurs le reste de la série.

Méthode de Lagrange. L'intégrale générale de l'équation linéaire privée de second membre est : $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \ldots\ldots + C_n y_n$ dans laquelle $C_1, C_2, \ldots C_n$ représentent des constantes arbi-

-traires.

On peut imaginer que l'on puisse satisfaire à cette équation avec le second membre, par la même valeur de y en supposant $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$ des fonctions de x convenablement déterminées. Or, si l'on substitue cette valeur de y dans l'équation on n'établira qu'une condition entre ces n fonctions de x, $C_1, C_2, C_3, \ldots C_n$; comme d'ailleurs il faut n relations pour les déterminer, on pourra établir entre elles $n-1$ relations arbitraires.

Cela posé, prenons les $n-1$ premières différentielles successives de y il viendra :

$$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx}+\ldots\ldots+C_n\frac{dy_n}{dx}$$

si l'on établit la condition :

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx}+\ldots\ldots\ldots+y_n\frac{dC_n}{dx}=0 \quad (1).$$

de même on aura :

$$\frac{d^2y}{dx^2}=C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}+\ldots\ldots+C_n\frac{d^2y_n}{dx^2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=C_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+C_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\ldots+C_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}.$$

en établissant encore les conditions

$$\frac{dy_1}{dx}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\cdot\frac{dC_2}{dx}+\ldots+\frac{dy_n}{dx}\cdot\frac{dC_n}{dx}=0. \quad (2).$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\cdot\frac{dC_2}{dx}+\ldots\ldots+\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\cdot\frac{dC_n}{dx}=0 \quad (n-1)$$

Ces $\overline{n-1}$ relations étant établies, on aura encore en différentiant la valeur de $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$:

$$\frac{d^n y}{dx^n}=\left(C_1\frac{d^n y_1}{dx^n}+C_2\frac{d^n y_2}{dx^n}+\dots+C_n\frac{d^n y_n}{dx^n}\right)+\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_2}{dx}+\dots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\,\frac{dC_n}{dx}.$$

puis pour avoir la n^e. équation, il faudra substituer dans l'équation différentielle donnée cette valeur de y et de ses dérivées.

On aura pour résultat en représentant l'équation de second membre par $\varphi(y)=0$.

$$C_1\varphi(y_1)+C_2\varphi(y_2)+\dots+\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_2}{dx}+\dots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_n}{dx}=V$$

Condition qui se réduit à :

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_2}{dx}+\dots+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\cdot\frac{dC_n}{dx}=V(n).$$

On a ainsi n relations entre $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \dots \frac{dC_n}{dx}$ et des fonctions connues de x, on pourra en tirer

$$\frac{dC_1}{dx}=X_1,\ \frac{dC_2}{dx}=X_2,\ \dots\dots \frac{dC_n}{dx}=X_n\ .$$

($X_1, X_2, X_3, \dots X_n$ étant des fonction connues de x).

En les intégrant, on en tire :

$$C_1=A_1+\int X_1\,dx,\ C_2=A_2+\int X_2\,dx\ \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots C_n=A_n+\int X_n\,dx$$

et en substituant ces valeurs dans y on aura enfin :

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots + A_n y_n + y_1 \int X_1 dx + y_2 \int X_2 dx + \text{etc.}$$

ce cette valeur à la forme qu'on a déjà démontrée.

On peut voir que ces équations en $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \frac{dC_n}{dx}$ ne sont pas incompatibles, car ce sont les mêmes que l'on aurait pour déterminer $C_1, C_2, \ldots C_n$, de telle manière que l'on ait pour $x = \alpha$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0, \ldots \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = 0$, $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = V$.

puisque la série de ces équations serait :

$$0 = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \cdots\cdots + C_n y_n$$

$$0 = C_1 \frac{dy_1}{dx} + \cdots\cdots + C_n \frac{dy_n}{dx}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$V = C_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots\cdots + C_n \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}.$$

et que d'ailleurs on est sûr que les valeurs $C_1, C_2, \ldots C_n$ tirées de ces relations sont des quantités finies, puisque par hypothèse on a l'intégrale générale.

Cette méthode dans laquelle on suppose les constantes arbitraires, est dite aussi méthode des variations des constantes arbitraires. On a déjà employé cette méthode pour la recherche des solutions particulières.

Equations différentielles simultanées.

Jusqu'à présent nous n'avons considéré que des équations différentielles contenant une variable inde-

-pendante unique et une seule fonction de cette variable.

Nous allons maintenant examiner le cas où l'on aurait plusieurs équations différentielles entre plusieurs fonctions d'une même variable indépendante.

Soient les équations :

$$F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^n z}{dx^n}\right) = 0 \quad (1)$$

$$F_2\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots \frac{d^p y}{dx^p}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^q z}{dx^q}\right) = 0 \quad (2).$$

Le but que l'on se propose est de trouver entre x, y et z deux équations qui aient la même généralité que les précédentes.

On ramène l'intégration de ces équations à celle que nous avons déjà examinée, c'est-à-dire, à celle d'une équation entre une variable indépendante et une seule fonction de cette variable.

Proposons-nous d'éliminer y et ses dérivées : pour cela, différentions (1) p fois et (2) m fois, c'est-à-dire, réduisons ces équations au même indice de dérivations par rapport à y. On pourra alors facilement éliminer y et ses $\overline{m+p}$ dérivées, ce qui fait $m+p+1$ quantités, car on a $m+p+2$ équations fournies par la première différentiation, m par la deuxième et les deux équations proposées. Il restera donc une équation entre z et ses dérivées dont le degré sera marqué par la plus grande des quantités $m+q$, $n+p$.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait : $m+q$, $n+p$, l'équation différentielle en z à laquelle on sera arrivé sera donc du degré $m+q$, et en intégrant

son intégration effectuée elle donnera une intégrale générale de la forme : $z = \left((x; C_1, C_2, \ldots C_{m+q}\right)$ renfermant $m+q$ constantes arbitraires.

Si maintenant on remplace z par cette valeur dans $m+p+1$ des équations dont on s'est servi pour faire l'élimination, il en résultera $m+p+1$ équations entre y, ses $m+p$ dérivées et $m+q$ constantes arbitraires : alors l'intégration se fera par une simple élimination ; car il suffira d'éliminer les $m+p$ dérivées par rapport à y et l'équation résultante donnera y en fonction de x et des $m+q$ mêmes constantes arbitraires.

Il se présente un cas d'exception c'est celui où il arriverait que l'élimination de y et de ses dérivées pût se faire sans avoir besoin de toutes les équations de conditions. On peut voir que dans ce cas on aura encore le même nombre de constantes arbitraires.

Car, admettons que l'on ait été obligé de prendre seulement les $m-r$ premières relations provenant de la différentiation successive de (2) : celle de ces équations qui contiendra le plus fort indice de dérivation par rapport à y contiendra alors $\frac{d^{m+p-r}y}{dx^{m+p-r}}$; il en résulte que si on admet que l'élimination de y et de ses dérivées peut se faire, il aura fallu prendre parmi les équations de condition provenant de (1) toutes celles qui contiennent $\frac{d^{m+p-r}y}{dx^{m+p-r}}$ et les dérivées inférieures car si l'on en prenait seulement une de plus elle introduirait $d^{m+p-r+1}y$ qui ne pourrait pas s'éliminer avec les précédentes dans lesquelles le plus grand indice de dérivation est $m+p-r$.

Par cela même, il se trouve établi qu'on a dû aussi négliger r des équations de condition provenant de (1). De sorte que si, pour fixer les idées on admet $m+q$, $n+p$ l'équation résultante en z sera du degré $m+q-r$ et par suite introduira $m+q-r$ constantes arbitraires. Si maintenant on substitue la valeur de z obtenue par l'intégration de cette dernière équation dans les $m+p-2r+1$ premières équations de condition; on aura : $m+p-2r+1$, relations contenant

$$x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^{m+p-r}y}{dx^{m+p-r}}$$ et $m+q-r$ constantes arbitraires,

entre lesquelles on ne pourra éliminer que $m+p-2r$ dérivées de telle sorte qu'au lieu de retomber sur une équation primitive on arriverait à une équation différentielle en y du degré r, qui introduirait r nouvelles constantes arbitraires; comme on en a déjà $m+q-r$ on voit bien que dans ce cas on aura encore $m+q$ constantes arbitraires.

Si l'on n'avait en vue que de déterminer le nombre des constantes qui entrent dans les intégrales d'équations simultanées, et non de ramener la question à l'intégration d'une équation à deux variables, on y parviendrait, comme il suit, par le développement de ces fonctions en séries.

Il pourra se présenter deux cas différents où l'on aura $\begin{cases} m > p \\ q > n \end{cases}$ ou $\begin{cases} m > p \\ q < n \end{cases}$

On peut dans le premier cas supposer les équations données mises sous la forme :

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi\left(x, y, \ldots \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}, z, \ldots\ldots\ldots \frac{d^n z}{dx^n}\right)$$

$$\frac{d^q z}{dx^q} = \psi\left(x, y, \ldots \frac{d^p y}{dx^p}, z, \ldots\ldots\ldots \frac{d^{q-1} z}{dx^{q-1}}\right)$$

Alors il est évident que si pour $x = \alpha$ on se donne arbitrairement les valeurs

$$y_\alpha \ldots \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)_\alpha, \; z_\alpha, \ldots\ldots \left(\frac{d^{q-1} z}{dx^{q-1}}\right)_\alpha$$

les quantités $\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_\alpha$ et $\left(\frac{d^q z}{dx^q}\right)_\alpha$ seront parfaitement déterminées. D'ailleurs les dérivées suivantes se détermineront de proche en proche comme on l'a déjà vu dans le cas d'une seule équation chacune au moyen de la dérivée précédente. On voit bien qu'il y a $m+q$ constantes arbitraires.

Dans le second cas, c'est-à-dire, où $\left\{\begin{matrix} m > p \\ n > q \end{matrix}\right.$ la méthode ne s'appliquerait plus car si l'on imagine qu'l'on ait $n = q + r$ la première des équations pourra se mettre sous la forme :

$$F_1\left(x, y, \ldots \frac{d^m y}{dx^m}, z, \ldots, \frac{d^q z}{dx^q}, \ldots \frac{d^{q+r} z}{dx^{q+r}}\right) = 0 \quad (1)$$

et l'on voit ainsi que les quantités prises arbitrairement dans le cas précédent, la valeur de $\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_\alpha$ ne sera pas déterminée. On peut pourtant ramener la question à ce dernier cas.

Car, si l'on différentie $F_{(2)}$ r fois on aura une relation de la forme :

$$F_3\left(x; y, \ldots \frac{d^{p+r} y}{dx^{p+r}}, z, \ldots\ldots \frac{d^{q+r} z}{dx^{q+r}}\right) = 0 \quad (3),$$

et alors le système des équations (1) et (3) rentrera dans le cas précédent, si l'on a : $p+r < m$ ou $n+p < m+q$.

Dans le cas où cette inégalité n'aurait pas lieu on lèvera la difficulté en résolvant les équations par rapport à $\frac{d^n z}{dx^n}$ et $\frac{d^p y}{dx^p}$ et alors on retomberait sur la condition $n+p, m+q$.

Considérons enfin le cas où l'on aurait K équations différentielles simultanées entre K fonctions d'une même variable indépendante.

Soient :

$$\frac{d^m y}{dx^m} = \varphi_1\left(x, y, \ldots \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}, z, \frac{dz}{dx}, \ldots \ldots u, \frac{du}{dx} \ldots\right)$$

$$\frac{d^n z}{dx^n} = \varphi_2\left(x, y, \ldots z, \frac{dz}{dx}, \ldots \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}, \ldots u, \frac{du}{dx} \ldots\right)$$

$$\frac{d^p u}{dx^p} = \varphi_3\left(x, y, \ldots z, \frac{dz}{dx}, \ldots u, \frac{du}{dx}, \ldots \frac{d^{p-1} u}{dx^{p-1}} \ldots\right)$$

. . . .

En supposant que $m, n, p, \ldots$ soient les indices les plus élevés par rapport aux lettres $y, z, u \ldots$, on voit comme précédemment que si pour $x = \alpha$ on se donne arbitrairement :

$$y_\alpha, \left(\frac{dy}{dx}\right)_\alpha, \ldots \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)_\alpha ;\ z_\alpha, \left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha, \ldots \left(\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}}\right)_\alpha ;$$

$u_\alpha, \left(\frac{dz}{dx}\right)_\alpha \ldots \left(\frac{d^{p-1} y}{dx^{p-1}}\right)_\alpha$ etc. La série de Maclaurin pourra être parfaitement déterminée : il en résulte d'ailleurs que le nombre des constantes arbitraires sera égal à $m+n+p+$ etc.

Le procédé d'élimination en réduisant aux mêmes indices par la différentiation réussirait encore de la même manière que pour deux équations.

Considérons en particulier le cas où toutes les dérivées sont du premier ordre.

On peut généralement les séparer et les mettre sous la forme :

$$\frac{dy}{dx} = \varphi_1 (x, y, z, u \ldots.)$$

$$\frac{dz}{dx} = \varphi_2 (x, y, z, u \ldots)$$

$$\frac{du}{dx} = \varphi_3 (x, y, z, u \ldots)$$

. . . .

(Il pourrait se faire dans certains cas particuliers que la séparation ne fût pas possible, c'est ce qui arrivera dans le cas où les dérivées entreraient par groupes dans les équations données ; dans ce cas, il faudra remarquer que les équations dont on peut se passer pour l'élimination établissent entre les fonctions correspondant à ces dérivées rangées par groupes, des relations qui peuvent servir à ramener le système d'équations donné à un autre système renfermant moins de fonctions, mais ne présentant plus ce cas d'exception).

On voit bien que le nombre des constantes sera égal à celui des équations données, car pour construire les fonctions $y, z, u, \ldots$ il suffira pour $x = \alpha$ de donner $y_\alpha, z_\alpha, u_\alpha, \ldots.$ car les équations donnent les accroissements successifs.

Dans ce cas particulier, l'élimination servant à ramener à l'intégration d'une équation à deux variables peut se faire

très simplement.

Car si l'on suppose qu'l'on a n de ces équations et que l'on différentie $\overline{n-1}$ fois la première d'entre elles, il viendra:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\varphi_1}{dx}+\frac{d\varphi_1}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{d\varphi_1}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}+\dots=\psi(x,y,z\dots w)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\psi_3(x,y,z,\dots w).$$

. . . .

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\psi_{n-1}(x,y,z,\dots w),$$

puis si on la joint elle-même à cette série d'équations on aura n équations entre lesquelles on pourra éliminer les $\overline{n-1}$ fonctions $z, u, \dots w$ et alors il rentre une équation de l'ordre n entre y et ses dérivées.

Il faut d'ailleurs remarquer que ce sera la seule intégration à effectuer, car connaissant y en fonction de x et des constantes arbitraires, on connaîtra: $\frac{dy}{dx}$ et les dérivées suivantes, en les substituant dans la série des n équations précédemment considérées, on aura un nombre d'équations suffisant pour déterminer ces fonctions $z, u, \dots w$ par une simple élimination.

On voit que le système de n équations différentielles se ramène à une équation différentielle du degré n entre deux variables.

La réciproque est vraie: Toute équation différentielle de l'ordre n entre deux variables peut être remplacée par un système de n équations différentielles simultanées du premier ordre entre n fonctions de l'une d'entre elles.

Soit, $F\left(x,y,\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2},\dots\dots\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\frac{d^ny}{dx^n}\right)=0,$

il suffira de poser :

$$\frac{dy}{dx} = y', \frac{dy'}{dx} = y'' \ldots\ldots \frac{dy_{(n-2)}}{dx} = y_{(n-1)}.$$

L'équation donnée deviendra :

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots\ldots y_{(n-1)}, \frac{dy_{(n-1)}}{dx}\right) = 0 ;$$

et l'ensemble de ces équations qui équivaut à la proposée constitue bien un système de n équations simultanées du premier ordre.

Ce résultat procure un nouveau moyen de voir que l'équation différentielle de l'ordre n doit contenir n constantes arbitraires, car elle doit avoir la même généralité que le système des n équations simultanées du premier ordre et chacune de celles-ci procure comme on l'a vu, une constante arbitraire.

Étudions en particulier une certaine classe d'équations simultanées : les équations linéaires du premier ordre.

Et d'abord, ne considérons que le cas de deux équations ; on pourra généralement les supposer mises sous la forme :

(1) $\frac{dy}{dx} + Py + Qz = V$. On aurait pu employer la méthode

(2) $\frac{dz}{dx} + P'y + Q'z = V'$ générale par différentiation et élimination avant d'avoir ainsi modifié leur forme, mais le procédé qui suit dû à D'Alembert est beaucoup plus simple.

Multiplions (2) par θ (θ étant une fonction de x que l'on se propose de déterminer par certaines conditions et ajoutons la avec (1) il viendra :

$$\frac{dy}{dx}+\theta\frac{dz}{dx}+(P+P'\theta)y+(Q+Q'\theta)z=V+V'\theta.$$

posons : $y+\theta z=v$ on en tire $y=v-\theta z$ et en différentiant :

$\frac{dy}{dx}+\theta\frac{dz}{dx}=\frac{dv}{dx}-z\frac{d\theta}{dx}$, substituant ces valeurs dans l'équation précédente, il viendra en ordonnant :

$$\frac{dv}{dx}+(P+P'\theta)v-z\cdot\left(\frac{d\theta}{dx}+(P+P'\theta)\theta-(Q+Q'\theta)\right)=V+V'\theta.$$

Si maintenant on profite de l'indétermination de θ pour annuller le coefficient de z, on aura remplacé les deux équations proposées par les deux suivantes :

$$\frac{dv}{dx}+(P+P'\theta)v=V+V'\theta. \quad (3)$$

$$\frac{d\theta}{dx}+(P+P'\theta)\theta-(Q+Q'\theta)=0 \quad (4)$$

On peut remarquer que dans tous les cas il suffira de connaître deux intégrales particulières θ_1 et θ_2 de (4), car (3) étant une équation linéaire et du premier ordre que nous savons résoudre, on en tirera deux intégrales correspondantes v_1 et v_2 contenant chacune une constante arbitraire, de telle sorte que l'on aura les deux relations $\begin{cases} y+\theta_1 z=v_1 \\ y+\theta_2 z=v_2 \end{cases}$ propres à déterminer y et z avec deux constantes arbitraires.

Si les coefficients P, P', Q, Q' étaient constants, on pourrait évidemment satisfaire à (4) en prenant pour θ_1 et θ_2 les valeurs constantes égales aux racines du troisième du second degré $(P+P'\theta)\theta-(Q+Q'\theta)$ égalé à zéro.

Toutefois, dans le cas où ces racines seraient égales on semblerait ne pas pouvoir obtenir deux intégrales particulières distinctes θ_1, θ_2 la résolution directe les donne immé-

-diatement, si l'on remarque que dans ce cas en désignant par α la valeur commune des racines le trinôme du second degré de la forme $P'(\theta-\alpha)^2$ de sorte que l'équation à intégrer devient:

$\dfrac{d\theta}{dx}+P'(\theta-\alpha)^2=0$. Les variables se séparent immédiatement et donnent $\dfrac{d\theta}{(\theta-\alpha)^2}+P'dx=0$, d'où

$\theta-\alpha\,\dfrac{1}{C_1+P'x}$ pour avoir θ_1 et θ_2 on fera successivement

$C=\infty$ et $C=0$ ce qui donnera: $\theta_1=\alpha$, $\theta_2=\dfrac{1}{P'x}+\alpha$.

On peut étendre la même méthode au cas de trois ou d'un plus grand nombre d'équations.

Supposons que l'on ait:

$$\frac{dy}{dx}+Py+Qz+Ru=V \quad (1)$$

$$\frac{dz}{dx}+P'y+Q'z+R'u=V' \quad (2)$$

$$\frac{du}{dx}+P''y+Q''z+R''u=V'' \quad (3).$$

Multiplions encore (2) par θ, (3) par λ et ajoutons il viendra:

$$\frac{dy}{dx}+\theta\frac{dz}{dx}+\lambda\frac{du}{dx}+(P+P'\theta+P''\lambda)y+(Q+Q'\theta+Q''\lambda)z+(R+R'\theta+R''\lambda)u=V+V'\theta+V''\lambda.$$

posons: $y+\theta z+\lambda u=v$ on en tire encore:

$$y=v-\theta z-\lambda u, \text{ et } \frac{dy}{dx}+\theta\frac{dz}{dx}+\lambda\frac{du}{dx}=\frac{dv}{dx}-z\frac{d\theta}{dx}-u\frac{d\lambda}{dx},$$

et en remplaçant dans les relations précédentes il viendra en ordon-

-nant :

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dv}{dx}+(P+P'\theta+P''\lambda)v \\ -z\left[\dfrac{d\theta}{dx}+(P+P'\theta+P''\lambda)\theta-(Q+Q'\theta+Q''\lambda)\right] \\ +u\left[\dfrac{d\lambda}{dx}+(P+P'\theta+P''\lambda)\lambda-(R+R'\theta+R''\lambda)\right]\end{array}\right\}=V+V'\theta+V''\lambda.$$

On disposera encore de θ et de λ pour annuller les coefficients de z et de u et l'on aura ainsi les trois équations :

$$\frac{dv}{dx}+(P+P'\theta+P''\lambda)v=V+V'\theta+V''\lambda. \quad (4)$$

$$\frac{d\theta}{dx}+(P+P'\theta+P''\lambda)\theta-(Q+Q'\theta+Q''\lambda)=0 \quad (5).$$

$$\frac{d\lambda}{dx}+(P+P'\theta+P''\lambda)\lambda-(R+R'\theta+R''\lambda)=0. \quad (6).$$

Il suffira encore de connaître trois intégrales particulières de (5) et de (6) car (4) donnera les valeurs v_1, v_2, v_3 correspondantes et contenant chacune une constante arbitraire et l'on obtiendra y, z, u au moyen des équations :

$$y+\theta_1 z+\lambda_1 u=v_1$$
$$y+\theta_2 z+\lambda_2 u=v_2$$
$$y+\theta_3 z+\lambda_3 u=v_3.$$

Dans le cas où les coefficients $P, P', P'', Q, Q', Q'', R, R', R''$ sont des quantités constantes les équations (5) et (6) seront évidemment satisfaites par les valeurs constantes tirées des équations algébriques :

$$(P+P'\theta+P''\lambda)\theta-(Q+Q'\theta+Q''\lambda)=0$$
$$(P+P'\theta+P''\lambda)\lambda-(R+R'\theta+R''\lambda)=0.$$

L'équation résultant de cette élimination semblerait devoir être du 4e degré, mais il est facile de voir par la simple élimination que les termes du quatrième degré disparaitront.

Appliquons ce que nous venons de voir à l'équation $\frac{d^2y}{dx^2}+P\frac{dy}{dx}+Qy=0$ dans le cas où les coefficients sont constants.

Nous avons déjà par un procédé différent déterminé son intégrale générale et nous avons trouvé $y=A_1e^{m_1x}+A_2e^{m_2x}$, m_1 et m_2 étant les racines de l'équation $m^2+Pm+Q=0$.

L'équation donnée peut être remplacée par le système des deux équations simultanées du premier ordre:

$\frac{dy}{dx}-z=0$ et $\frac{dz}{dx}+Pz+Qy=0$.

Appliquons la méthode générale et pour cela multiplions la seconde de ces équations par la fonction indéterminée θ, il viendra comme on l'a vu:

$$\frac{dy}{dx}+\theta\frac{dz}{dx}+(P\theta-1)z+Q\theta y=0,$$

puis en posant $y+\theta z=v$, il viendra en remarquant que dans ce cas où les coefficients sont constants on pourra satisfaire par des valeurs constantes de θ, $\frac{dy}{dx}+\theta\frac{dz}{dx}=\frac{dv}{dx}$, puis en substituant: $\frac{dv}{dx}+(P\theta-1)z+Q\theta(v-\theta z)=0$, ou en ordonnant

$\frac{dv}{dx}+Q\theta v-z(Q\theta^2-P\theta+1)=0$.

Maintenant, en disposant de l'indétermination de θ pour annuler le terme en z, on remplacera les deux équations données par les suivantes:

$$\frac{dv}{dx}+Q\theta v=0\ ,\ Q\theta^2-P\theta+1=0$$

La première de ces équations intégrée donne $v=Ce^{-Q\theta x}$, et si l'on représente par θ_1 θ_2 les racines de la seconde, on aura pour déterminer y et z, les relations :

$$y+\theta_1 z=C_1 e^{-Q\theta_1 x}$$
$$y+\theta_2 z=C_2 e^{-Q\theta_2 x}.$$

On en tirera $y=\dfrac{C_1\theta_2 e^{-Q\theta_1 x}-C_2\theta_1 e^{-Q\theta_2 x}}{\theta_2-\theta_1}$

ou comme $\dfrac{C_1\theta_2}{\theta_2-\theta_1}$ et $-\dfrac{C_2\theta_1}{\theta_2-\theta_1}$. Sont encore des constantes arbitraires :

$$y=A_1 e^{-Q\theta_1 x}+A_2 e^{-Q\theta_2 x}.$$

On peut voir que ce résultat est bien le même que celui que nous avons rappelé, car si l'on compare entre elles les équations du second degré en m et en θ il sera facile d'en conclure que $\theta_1=\dfrac{-1}{m_1}$ et $\theta_2=\dfrac{-1}{m_2}$. Comme d'ailleurs $Q=m_1 m_2$ il viendra enfin en substituant ces valeurs :

$$y=A_1 e^{m_1 x}+A_2 e^{m_2 x}$$

On a vu qu'un système d'équations différentielles simultanées du premier ordre de la forme :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P},\ \frac{dz}{dx}=\frac{R}{P},\ \ldots\ldots\ \frac{dw}{dx}=\frac{W}{P}.$$

est satisfait par un système de n équations contenant n constantes arbitraires et de la forme :

$$F_1(x, y, z, \ldots\ldots w, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n) = 0$$
$$F_2(x, y, z, \ldots\ldots w, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n(x, y, z, \ldots\ldots w, \alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n) = 0$$

On peut les supposer résolues par rapport aux constantes de telle sorte que l'on aura :

$$\alpha_1 = f_1(x, y, z, \ldots w)$$
$$\alpha_2 = f_2(x, y, z, \ldots w)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_n = f_n(x, y, z, \ldots w).$$

Sous cette forme il est facile de voir qu'en admettant qu'elle satisfont aux équations différentielles simultanées données elles jouissent de la propriété de satisfaire toutes à une même équation aux différences partielles.

En effet, différentions la première, par exemple, il viendra :

$$0 = \frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{df_1}{dz}\cdot\frac{dz}{dx} + \ldots\ldots + \frac{df_1}{dw}\cdot\frac{dw}{dx}.$$

Si l'on supprime l'indice on aura une équation qui correspondra à la différentiation de toutes les précédentes ; d'ailleurs par hypothèse elles satisfont toutes aux conditions :

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{Q}{P}, \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{R}{P} \ldots\ldots \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{W}{P}$, elles satisferont donc toutes à l'équation :

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy}\cdot\frac{Q}{P} + \frac{df}{dz}\cdot\frac{R}{P} + \ldots + \frac{df}{dw}\,\frac{W}{P} = 0.$$

On peut de même faire voir qu'une combinaison quelconque de ces solutions $\varphi(f_1, f_2, \dots f_n)$ égalée à une constante satisfait à cette même équation; ce résultat peut être prévu à priori, car puisque $f_1, f_2, \dots f_n$ sont égalés à des constantes, $\varphi(f_1, f_2, \dots f_n)$ sera aussi une constante et comme d'ailleurs ce n'est qu'une combinaison des équations primitives qui satisfont au système d'équations simultanées, elle pourra remplacer l'une d'elles.

On peut le vérifier par la substitution directe: elle donne

$$P\frac{d\varphi}{dx} + Q\frac{d\varphi}{dy} + R\frac{d\varphi}{dz} + \dots\dots\dots W\frac{d\varphi}{dw} = 0$$

or :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dx} + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dx} + \dots\dots$$

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dy} + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dy} + \dots\dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{d\varphi}{dw} = \frac{d\varphi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dw} + \frac{d\varphi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dw} + \dots\dots$$

il en résultera en ordonnant par rapport aux quantités

$\frac{d\varphi}{df_1}, \frac{d\varphi}{df_2} \dots\dots$

$$\frac{d\varphi}{df_1}\left[P\frac{df_1}{dx} + Q\frac{df_1}{dy} + \dots + W\frac{df_1}{dw}\right] + \frac{d\varphi}{df_2}\left[P\frac{df_2}{dx} + Q\frac{df_2}{dx} + \dots\right] + \text{etc.} =$$

Relation qui est évidemment satisfaite.

Il faut toutefois bien remarquer que toutes ces relations doivent être identiquement satisfaites, car s'il en était autrement on aurait une relation sans constantes arbitraires entre $x, y, z, \dots w$ qui ferait que pour une valeur dé-

-terminée de x on ne pourrait pas prendre des valeurs arbitraires pour toutes les autres fonctions. Il pourrait arriver qu'on ne retombât pas sur une identité c'est qu'alors on n'aurait qu'une intégrale particulière, et la relation trouvée dépendrait de la valeur particulière attribuée à la constante.

Réciproquement, toute relation $F(x, y, z, \ldots w)$ satisfaisant à cette équation aux différences partielles devra être de la forme : $\Phi(f_1, f_2, \ldots f_n) = C$.

En effet, on peut tirer des n équations primitives satisfaisant au système d'équations simultanées, les valeurs de $y, z, \ldots w$ en fonction de $a_1, a_2, \ldots a_n$ de telle sorte que la fonction F pourra être mise sous la forme : $\psi(x, a_1, a_2, \ldots a_n)$; avant l'élimination cette fonction F était donc identiquement égale à $\psi(x, f_1, f_2, \ldots f_n)$, il reste à faire voir qu'elle ne contient pas x explicitement, et cela sera démontré si l'on remarque que $\frac{d\psi}{dx} = 0$.

En effet, on devra avoir par hypothèse :

$$P\frac{d\psi}{dx} + Q\frac{d\psi}{dy} + R\frac{d\psi}{dz} + \ldots\ldots + \frac{d\psi}{dw}W = 0.$$

Or, en différentiant, on trouve :

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{d\psi}{dx} + \frac{d\psi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dx} + \frac{d\psi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dx} + \text{etc.}$$

$$\frac{d\psi}{dy} = \frac{d\psi}{df_1}\cdot\frac{df_1}{dy} + \frac{d\psi}{df_2}\cdot\frac{df_2}{dx} + \text{etc.}$$

. . . .

puis en substituant et ordonnant :

$$P\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\psi}{df_1}\left[P\frac{df_1}{dx}+Q\frac{df_1}{dx}+\cdots\right]+\frac{d\psi}{df_2}\left[P\frac{df_2}{dx}+Q\frac{df_2}{dx}+\right]+\text{etc}=0$$

qui se réduit à $P\frac{d\psi}{dx}=0$, on en conclut $\frac{d\psi}{dx}=0$.

Il en résulte que toutes les solutions distinctes de cette équation aux différentielles partielles seront données par le système

$$f_1(x,y,z,\ldots w)=a_1$$
$$f_2(x,y,z,\ldots w)=a_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_n(x,y,z,\ldots w)=a_n$$

car toutes les autres en seront des combinaisons.

Et réciproquement pour avoir les solutions du système des équations simultanées, il suffira d'avoir n solutions distinctes de l'équation aux différentielles partielles. Il faudra donc savoir reconnaître si deux solutions données de la forme $F_1(f_1,f_2,\ldots f_n)=C_1$, $F_2(f_1,f_2,\ldots f_n)=C_2$ sont distinctes l'une de l'autre. Pour cela il suffit de remarquer que si elles rentrent l'une dans l'autre, en éliminant l'une dans l'autre, en éliminant l'une des fonctions qui y entrent, on devrait retomber sur une identité.

On voit qu'une fonction arbitraire $\Phi(f_1,f_2,\ldots f_n)=0$ satisfait à l'équation aux différentielles partielles et ce qu'il faut remarquer c'est que ce symbole Φ n'entre pas dans cette équation.

En effet, cette fonction renfermant $n+1$ variable on peut considérer l'une quelconque d'entr'elles comme fonctions des n autres; supposons pour fixer les idées

qu'il n'y en ait que trois, il sera manifeste que la généralité du résultat ne sera pas altérée par cette hypothèse, et différentions Φ successivement par rapport à x et y, il viendra :

$$\frac{d\Phi}{df_1}\left[\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dz}p\right]+\frac{d\Phi}{df_2}\left[\frac{df_2}{dx}+\frac{df_2}{dz}p\right]=0$$

$$\frac{d\Phi}{df_1}\left[\frac{df_1}{dy}+\frac{df_1}{dz}q\right]+\frac{d\Phi}{df_2}\left[\frac{df_2}{dy}+\frac{df_2}{dz}q\right]=0.$$

en désignant $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ par p et q entre ces équations on pourra éliminer le rapport des quantités $\frac{d\Phi}{df_1}$ et $\frac{d\Phi}{df_2}$.

Cette solution pourrait encore être donnée sous la forme $f_1=\Phi(f_2)$. Sous cette forme on peut encore voir que le symbole arbitraire Φ n'entrera pas dans l'équation aux différentielles partielles.

Pour celà, on différentiera encore successivement par rapport à x et y, ce qui donnera :

$$\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dz}p=\frac{d\Phi}{df_2}\left[\frac{df_2}{dx}+\frac{df_2}{dz}p\right]$$

$$\frac{df_1}{dy}+\frac{df_1}{dz}q=\frac{d\Phi}{df_2}\left[\frac{df_2}{dy}+\frac{df_2}{dz}q\right]$$

et l'on éliminera immédiatement $\frac{d\Phi}{df_2}$ en les divisant membre à membre.

Enfin cette solution pourrait être donnée sous la forme :

$F\left[f_1, \Phi(f_2)\right]=0$, et l'on peut encore par le même procédé constater la disparition de Φ dans l'équation aux différentielles partielles. Car on a :

$$\frac{dF}{df_1}\left[\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dz}p\right]+\frac{dF}{d\Phi}\,\frac{d\Phi}{df_2}\left[\frac{df_2}{dx}+\frac{df_2}{dz}p\right]=0$$

$$\frac{dF}{df_1}\left[\frac{df_1}{dy}+\frac{df_1}{dz}q\right]+\frac{dF}{d\Phi}\,\frac{d\Phi}{df_2}\left[\frac{df_2}{dy}+\frac{df_2}{dz}q\right]=0$$

entre lesquelles on éliminera encore $\frac{d\Phi}{df_2}$.

Par cela même il demeure démontré que l'équation aux différentielles partielles sera toujours de la forme : $\Psi(x, y, z, p, q)=0$.

Nous avons vu dans la dernière leçon qu'il était essentiel de savoir reconnaître si deux fonctions $F_1(x,y,z,\ldots w)=C_1$, $F_2(x,y,z,\ldots w)=C_2$ étaient distinctes et nous avons dit que pour le reconnaître il suffisait d'éliminer entre elles une des fonctions qui y entrent. En effet, imaginons que de F_1 on ait tiré :
$x=\varphi(y,z,\ldots w,C_1)$; en le substituant dans F_2 il viendra

$$F_2(x,y,z,\ldots w)=\chi(y,z,\ldots w,C_1) \text{ ou égal à } \chi(y,z,\ldots w,F_1).$$

Or, dans le cas où F_2 ne sera pas distinct de F_1 on devra avoir
$F_2=\chi(F_1)$ et par conséquent les autres variables $y,z,\ldots w$

auront dû s'éliminer en même temps que x.

On vérifiera de la même manière si une troisième fonction $F_3(x,y,z,\ldots w)=C_3$ est distincte de F_1 et de F_2 ; mais il sera nécessaire d'examiner encore si ce ne serait pas une combinaison de ces mêmes fonctions.

Alors on éliminera deux variables au moyen de F_1 et F_2 et l'on trouvera comme précédemment :

$F_3(x,y,z,\ldots w)=\psi(z,\ldots w,F_1,F_2)$ et dans le cas où F_3 sera

égal à une certaine fonction $\psi(F_1,F_2)$ les autres variables $z\ldots w$ auront dû s'éliminer en même temps que x et y.

On suivrait la même marche pour un plus grand nombre de fonctions.

Appliquons cette théorie des équations simultanées au

système $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx}=z \quad (1) \\ \dfrac{dz}{dx}=3z-2y \quad (2). \end{cases}$

L'élimination se fait immédiatement car si l'on différentie

(1) il viendra $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dz}{dx}$ et en substituant dans (2) on aura:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$$

Pour trouver l'intégrale générale de cette équation linéaire à coefficients constants, on posera $m^2 - 3m + 2 = 0$, qui donnera $m_1 = 1$, $m_2 = 2$ et par suite pour l'intégrale générale:

$y = A_1 e^{x} + A_2 e^{2x}$, on en déduit au moyen de (1)

$z = A_1 e^{x} + 2A_2 e^{2x}$.

Ces deux équations résolues par rapport aux constantes donnent: $\begin{cases} A_2 = (z-y)e^{-2x} = f_2 \\ A_1 = (2y-z)e^{-x} = f_1 \end{cases}$

On peut vérifier qu'elles satisfont identiquement à l'équation aux différentielles partielles $\frac{df}{dx}P + \frac{df}{dy}Q + \frac{df}{dz}R = 0$

qui dans ce cas devient: $\frac{df}{dx} + z\frac{df}{dy} + (3z-2y)\frac{df}{dz} = 0$

Vérifions le pour f_2, on aura:

$$-2(z-y)e^{-2x} - ze^{-2x} + (3z-2y)e^{-2x} = e^{-2x}\left[-2z+2y-z+3z-2y\right] = 0$$

Dans le cas où l'on n'a que deux variables indépendantes, nous avons vu qu'on pourrait éliminer une fonction arbitraire d'une fonction de ces variables, de la forme $\Phi(f_2)$ lorsqu'on prendra trois variables indépendantes, on pourra éliminer une fonction arbitraire de la forme $\Phi(f_2, f_3) = 0$. f_2 et f_3 étant des fonctions de x, y, z, t. En effet, supposons que l'on ait

(1) $F(f_1, \Phi(f_2, f_3)) = 0$, et différentions cette relation successi-

-rement par rapport à chacune des trois variables indépendan-tes il viendra en désignant $\frac{dt}{dx}, \frac{dt}{dy}, \frac{dt}{dz}$ par p, q, r :

$$(2)\quad \frac{dF}{df_1}\left[\frac{df_1}{dx}+\frac{df_1}{dt}p\right]+\frac{dF}{d\Phi}\left[\frac{d\Phi}{df_2}\left(\frac{df_2}{dx}+\frac{df_2}{dt}p\right)+\frac{d\Phi}{df_3}\left(\frac{df_3}{dx}+\frac{df_3}{dt}p\right)\right]=$$

$$(3)\quad \frac{dF}{df_1}\left[\frac{df_1}{dy}+\frac{df_1}{dt}q\right]+\frac{dF}{d\Phi}\left[\frac{d\Phi}{df_2}\left(\frac{df_2}{dy}+\frac{df_2}{dt}q\right)+\frac{d\Phi}{df_3}\left(\frac{df_3}{dy}+\frac{df_3}{dt}q\right)\right]=$$

$$(4)\quad \frac{dF}{df_1}\left[\frac{df_1}{dy}+\frac{df_2}{dt}r\right]+\frac{dF}{d\Phi}\left[\frac{d\Phi}{df_2}\left(\frac{df_2}{dz}+\frac{df_2}{dt}r\right)+\frac{d\Phi}{df_3}\left(\frac{df_3}{dz}+\frac{df_3}{dt}r\right)\right]=$$

et l'on pourra éliminer entre (1), (2), (3), (4) Φ, $\frac{d\Phi}{df_2}$ et $\frac{d\Phi}{df_3}$.

On voit bien que si l'on n'avait que deux variables indépendantes, l'élimination ne pourrait pas se faire, car on ne pourrait différentier que par rapport à x et y et l'on n'aurait que trois équations.

De même que dans le cas de deux variables, on arriverait au même résultat si la forme de la relation donnée variait, et l'on reconnaîtrait facilement que que l'on arrive aux mêmes résultats par des procédés identiques.

Enfin, on remarquera que l'on continuera de la même manière sans introduire de différentielles d'ordre supérieur au premier pour une équation contenant un nombre quelconque de variables indépendantes (c'est ce qui constitue l'élimination des fonctions arbitraires dans les équations aux différentielles partielles, élimination qui correspond à celle des constantes arbitraires dans le cas où l'on n'a qu'une seule variable indépendante).

Lorsqu'on ne s'astreint pas à n'introduire que des différen-

-tielles partielles du premier ordre, l'analogie avec les constantes arbitraires ne subsiste plus et le degré de différentiation auquel il faudra s'élever variera avec la forme de la fonction.

Toutefois, dans chaque cas on pourra à priori déterminer le maximum de différentiations qu'il sera nécessaire d'effectuer.

Admettons, par exemple, que nous ayons la fonction : $F(f_1, \Phi(f_2), \psi(f_3)) = 0$ (1), qui ne renferme que deux variables indépendantes et proposons nous d'éliminer dans ce cas les fonctions arbitraires Φ et ψ.

Une première différentiation par rapport à chacune des variables indépendantes donnera deux équations (2) et (3) dans lesquelles on aura introduit $\frac{d\Phi}{df_1}, \frac{d\psi}{df_2}$.

On vérifie (ce que l'on a déjà fait voir), que dès maintenant l'élimination n'est pas possible, car on n'a que trois équations pour éliminer les quatre quantitées

$\Phi, \psi, \frac{d\Phi}{df_1}, \frac{d\psi}{df_2}$.

En passant aux différentielles du deuxième ordre on aura trois nouvelles équations et on introduira deux nouvelles quantités : $\frac{d^2\Phi}{df_1^2}, \frac{d^2\psi}{df_2^2}$; on aura donc six équations pour éliminer six quantités ce qui n'est pas généralement possible.

Il faudra donc passer au troisième ordre, on aura quatre nouvelles équations et l'on n'introduira que deux nouvelles quantités $\frac{d^3\Phi}{(df_1)^3}, \frac{d^3\psi}{(df_2)^3}$; ayant alors dix équations pour

éliminer huit quantités, l'élimination pourra se faire, et même de deux manières différentes.

Comme nous l'avons vu il y aura des cas où l'on ne sera pas obligé de s'élever jusqu'à cette limite. Ainsi on vérifiera facilement que pour la fonction :
$z = \Phi(x+ay) + \Psi(x-ay)$ il suffira de s'élever jusqu'au second ordre.

Dans le cas de deux variables indépendantes, si l'on a $f_1 = \Phi(f_2)$, on a trouvé :

$$\frac{df_1}{dx} + \frac{df_1}{dz}p = \Phi'(f_2)\left[\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dz}p\right]$$

$$\frac{df_1}{dy} + \frac{df_1}{dy}q = \Phi'(f_2)\left[\frac{df_2}{dx} + \frac{df_2}{dz}q\right]$$

En divisant ces deux équations membre à membre et remarquant que le terme en pq disparaît, il est facile de voir que l'on arrive à un résultat de la forme :
$Pp + Qq = R$ [P, Q, R étant des fonctions de x, y, z].

Cette équation est dite équation aux différentielles partielles linéaires ; elle diffère essentiellement des équations différentielles ordinaires en ce qu'elle ne contient pas la variable principale. d'ailleurs on serait arrivé au même résultat si la fonction d'où on est parti avait été mise sous une autre forme.

Proposons-nous actuellement de trouver l'équation primitive entre x, y et z qui correspond à la relation différentielle $Pp + Qq = R$ (1), et pour cela supposons que ce soit la fonction $f(x, y, z) = 0$, en différentiant successivement par rapport à x et y, il viendra :

$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}p = 0, \quad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}q = 0$, et si l'on reporte les

les valeurs de p et de q tirées de ces equations dans (1) il viendra en réduisant : $P\frac{df}{dx}+Q\frac{df}{dy}+R\frac{df}{dz}=0$ (2) de telle sorte que la fonction cherchée est la forme la plus générale qui puisse satisfaire à (2) et nous avons vu que pour celà il suffisait d'intégrer le système d'équations simultanées $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$: car si les intégrales de ce système sont $a_1=f_1(x,y,z)$, $a_2=f_2(x,y,z)$, $\Phi(f_1,f_2)=0$ sera la fonction cherchée.

Appliquons ce principe aux questions géométriques suivantes :

<u>Surfaces cylindriques</u>. La propriété caractéristique de ces surfaces est que le plan tangent est parallèle à toutes les génératrices, car si nous exprimons cette condition que le plan tangent dont l'équation générale est :

$Z-z=p(X-x)+q(Y-y)$ est toujours parallèle à la droite dont les équations sont $\begin{cases}X-x=a(Z-z)\\Y-y=b(Z-z)\end{cases}$. Il vient pour l'équation aux différentielles partielles linéaires : $ap+bq=1$.

Puis pour trouver toutes les surfaces qui jouissent de cette propriété il faudra intégrer le système

$\frac{dx}{a}=\frac{dy}{b}=dz$ qui donne $\begin{cases}x=az+a_1\\y=bz+a_2\end{cases}$ ou en résolvant par rapport aux constantes arbitraires

$a_1=x-az$, $a_2=y-bz$ ce qui donne pour l'équation générale de ces surfaces : $y-bz=\Phi(x-az$

On vérifiera que cette équation est exclusivement celle des surfaces cylindriques, soit en l'établissant directement, soit en la coupant par un plan $x - az = C$ qui donne $y - bz = \varphi(c)$, ce qui fait voir que l'intersection est toujours une droite parallèle à la direction commune des génératrices.

Surfaces coniques. Exprimons que le plan tangent passe constamment par le sommet (α, β, γ), nous aurons l'équation aux différentielles partielles :

$$\gamma - z = p(\alpha - x) + q(\beta - y),$$

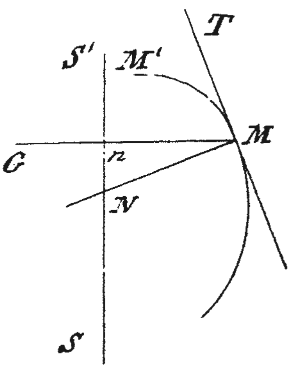
et pour intégrer cette équation il faudra résoudre le système : $\dfrac{dx}{x-\alpha} = \dfrac{dy}{y-\beta} = \dfrac{dz}{z-\gamma}$, on en tire en intégrant :

$\dfrac{x-\alpha}{z-\gamma} = a_1$, $\dfrac{y-\beta}{z-\gamma} = a_2$, et la fonction cherchée sera :

$$\frac{y-\beta}{z-\gamma} = \Phi\left[\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\right]$$

On vérifiera comme précédemment que cette équation représente exclusivement les surfaces coniques.

<u>Surfaces de révolutions</u>. La propriété caractéristique de ces surfaces est d'être telles que la normale en un point quelconque va toujours rencontrer une même droite.



Ce résultat peut être démontré par la géométrie ; car en effet, considérons un point M quelconque de cette surface et supposons que la normale MN à cette surface aille

rencontre la droite SS'; imaginons de plus que la courbe MM' soit l'intersection de la surface considérée avec le plan passant par le point M et l'axe SS'. Si MT est la tangente à cette courbe au point M, le plan vertical mené suivant cette droite sera le plan tangent à la surface et si l'on mène par ce même point M une section MG perpendiculaire à SS', la tangente à cette section au point M sera la verticale élevée en ce point et par suite sa normale sera Mn; comme d'ailleurs il est évident que pour chaque point de cette section MG la normale passera par ce même point n, il s'ensuit que ce sera un cercle et par suite que la surface sera de révolution autour de l'axe SS'.

L'analyse conduit au même résultat; car supposons que $\begin{cases} x = az + \alpha \\ y = bz + \beta \end{cases}$ soient les équations de la droite SS'; les équations générales de la normale MN seront :

$$\begin{cases} X - x = p\,(Z - z) \\ Y - y = q\,(Z - z) \end{cases}$$

En exprimant qu'elles se rencontrent, on aura la relation : $\dfrac{b+q}{a+p} = \dfrac{qz+y-\beta}{pz+x-\alpha}$; ou en réduisant :

$$(y-bz-\beta)\,p - (x-az-\alpha)\,q = b(x-\alpha) - a(y-\beta).$$

Alors il faudra intégrer le système :

$$\frac{dx}{y-bz-\beta} = -\frac{dx}{x-az-\alpha} = \frac{dz}{b(x-\alpha)-a(y-\beta)}$$

Si nous posons chacun de ces rapports égal à dt il viendra :

(1) $dx = (y - bz - \beta)\, dt$
(2) $dy = -(x - az - \alpha)\, dt$
(3) $dz = b(x-\alpha) - a(y-\beta)\, dt.$

Alors en multipliant (1) par $\overline{x-\alpha}$, (2) par $(y-\beta)$ et (3) par 1 puis ajoutant il viendra :

$(x-\alpha)dx + (y-\beta)dy + z dz = 0$, donc en intégrant

$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = a_1$ (4).

Multipliant encore (1) (2) (3) par $a.\, b.\, 1$ on aura $a dx + b dy + dz = a_2$ (5). l'équation cherchée est donc

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + z^2 = \Phi(ax + by + cz)$$

qui est bien l'équation des surfaces de révolution, car en coupant par un plan de la forme $ax + by + cz = K$ perpendiculaire à SS' on a une sphère dont le centre est sur cette même droite.

L'intégration des équations aux différentielles partielles linéaires du premier ordre a introduit une fonction arbitraire, et nous avons montré l'analogie de cette fonction avec la constante arbitraire introduite par l'intégration des équations différentielles ordinaires. On sait d'ailleurs que la constante arbitraire peut être déterminée de telle manière que la courbe représentée par l'intégrale générale satisfasse à une condition géométrique donnée. On peut également se proposer de donner à la fonction arbitraire une détermination telle que la surface représentée par l'équation primitive satisfasse à certaines conditions.

Assujettissons d'abord la surface représentée par l'intégrale générale à contenir une courbe : $\begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$.

Les points de cette courbe devront satisfaire aux deux équations: $\alpha_1 = f_1(x,y,z)$, $\alpha_2 = f_2(x,y,z)$ de telle sorte que si l'on élimine x, y, z entre ces quatre équations on aura une certaine relation déterminée $\psi(\alpha_1, \alpha_2) = 0$, ou en remplaçant α_1, α_2 par leurs valeurs $\psi(f_1, f_2) = 0$ qui sera l'équation de la surface ainsi déterminée.

On peut encore proposer d'assujettir cette surface à envelopper une surface donnée $F_1(x,y,z) = 0$. Ce problème sera immédiatement ramené au précédent si l'on détermine la courbe de contact.

Or, $F_1(x,y,z)$ est déjà une des équations de cette courbe. On en aura une autre, en exprimant que la surface donnée et celle représentée par l'intégrale générale ont le même plan tangent en tous les points de cette courbe. Les plans tangens à ces deux surfaces au point (x,y,z) ayant pour équations:

$$\frac{dF_1}{dx}(X-x) + \frac{dF_1}{dy}(Y-y) + \frac{dF_1}{dz}(Z-z) = 0,$$

et $Z - z = p(X-x) + q(Y-y)$, on a:

$$p = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF_1}{dz}} \text{ et } q = -\frac{\frac{dF_1}{dy}}{\frac{dF_1}{dz}},$$ puis en portant ces valeurs de

p et de q dans: $Pq + Qq = R$, il vient:

$$P\frac{dF_1}{dx} + Q\frac{dF_1}{dy} + R\frac{dF_1}{dz} = 0,$$ équation qui avec $F_1 = 0$

détermine la courbe de contact.

<u>Surfaces</u> <u>conoïdes</u>. Ces surfaces jouissent de la propriété

que leur intersection par un plan, parallèle au plan directeur est une ou plusieurs génératrices.

Il en résulte que si par le point de contact du plan tangent avec la surface, on mène un plan parallèle au plan directeur, ce plan coupera le plan tangent suivant une génératrice.

L'équation du plan tangent au point (x, y, z) étant $Z - z = p(X - x) + q(Y - y)$, si l'on prend pour plan directeur le plan des xy le plan parallèle à ce plan directeur et passant par le point (x, y, z) aura pour équation : $Z = z$ donc son intersection avec le plan tangent aura pour projection $0 = p(X - x) + q(Y - y)$, puis si l'on prend pour directrice l'axe des z sa projection devra toujours passer par l'origine ce qui donnera enfin pour équation aux différentielles partielles $px + qy = 0$.

On l'intégrera en posant : $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{0}$; la dernière de ces relations donne $dz = 0$. Car on peut remarquer que ces équations expriment que les accroissements dx, dy et dz sont proportionnels à x, y et 0 ; on en tire $z = a_1$.

Maintenant la relation $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ intégrée donne $\frac{y}{x} = a_2$. et par suite l'intégrale générale sera : $\frac{y}{x} = \Phi(z)$.

On vérifiera facilement que cette équation est bien celle des surfaces conoïdes. Enfin, on pourra attribuer une certaine détermination à la fonction Φ en l'assujettissant à une condition géométrique quelconque.

Toutes les fois que l'une des fonctions P, Q, R est nulle, le problème est immédiatement ramené à l'intégration des équations différentielles ordinaires.

Supposons $Q=0$; l'équation deviendra $Pp=R$ ou $P\frac{dz}{dx}=R$; si on l'intègre en regardant y comme constant on aura pour intégrale une relation $F(x,y,z,C)=0$ qui devra être telle que si on la différentie et que l'on élimine C entre elle et l'équation différentielle ainsi obtenue on devra retomber sur $P\frac{dz}{dx}=R$; or, on voit que C peut être une fonction quelconque de y ; de telle sorte que l'on aura le même résultat pour $F(x,y,z\ \Phi(y))=0$.

Ce raisonnement est général ; toutes les fois que l'on aura une équation manquant de toutes les dérivées partielles par rapport à l'une des variables, son intégration se fera comme si cette variable était constante ; seulement on aura soin de remplacer les constantes arbitraires par des fonctions arbitraires de cette même variable.

Examinons encore le cas où $R=0$, l'équation proposée est alors : $Pp+Qq=0$.

Or, on a évidemment $\frac{dz}{dx}=\frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$ où $p=q\frac{dy}{dx}$.

En remplaçant dans la proposée la valeur de $\frac{p}{q}$ tirée de cette dernière relation on a $P\frac{dy}{dx}+Q=0$ equation aux différentielles partielles qui rentre dans le cas précédent.

Appliquons enfin cette théorie à des exemples purement analytiques.

Nous avons vu que la recherche du facteur d'intégrabilité dépendait de la résolution de l'équation aux différentielles partielles $N\frac{d\mu}{dx}-M\frac{d\mu}{dy}=\mu\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)$ et

par suite la question se trouvera résolue si l'on peut résoudre le système d'équations simultanées :

$$\frac{dx}{N} = -\frac{dy}{M} = \frac{d\mu}{\mu\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)}.$$

La première de ces équations est la proposée elle même ; la seconde donnera μ quand on supposera connue l'intégrale générale que cette première relation, car si l'on connait y en fonction de x, cette deuxième équation qui peut être mise sous la forme $\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right)dx}{N}$ s'intégrera par une simple quadrature.

D'ailleurs si l'on suppose que : $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$ on en déduit $d\mu = 0$ d'où $\mu = C$ ce que l'on pouvait prévoir car dans ce cas le premier membre de la proposée est une différentielle exacte.

On voit enfin que l'on pourra obtenir μ par une simple quadrature lorsque le facteur $\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N}$ sera une fonction de x seulement ; ce résultat avait aussi été traité directement.

Le raisonnement qui a fait voir que l'intégration de l'équation $Pp + Qq = V$ dépendrait de celle des équations simultanées $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{V}$, peut être généralisé.

Supposons, en effet que l'on ait l'équation :

$$P\frac{du}{dx} + Q\frac{du}{dy} + R\frac{du}{dz} + \cdots + W\frac{du}{dw} = U$$

entre n variables indépendantes; $F(x,y,z,\ldots w,u)=0$.
Soit l'intégrale cherchée, on aura en différentiant successivement par rapport à chacune des n variables indépendantes :

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{du}\cdot\frac{du}{dx}=0 \quad \text{d'où} \quad \frac{du}{dx}=-\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{du}}$$

On aurait de même : $\dfrac{du}{dy}=-\dfrac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{du}}$ et ainsi de suite.

En substituant ces valeurs dans l'équation proposée, il viendra :

$$-P\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{du}}-Q\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{du}}-R\frac{\frac{dF}{dz}}{\frac{dF}{du}}\ldots\ldots-W\frac{\frac{dF}{dw}}{\frac{dF}{du}}=U.$$

ou en réduisant :

$$P\frac{dF}{dx}+Q\frac{dF}{dy}+R\frac{dF}{dz}+\ldots\ldots+W\frac{dF}{dw}+U\frac{dF}{du}=0.$$

alors cette équation aux différentielles partielles se résoudra comme on le sait au moyen des équations simultanées :

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\ldots\ldots\ldots=\frac{dw}{W}=\frac{du}{U}.$$

Appliquons à l'équation :

$$x\frac{du}{dx}+y\frac{du}{dy}+z\frac{du}{dz}+\ldots\ldots\ldots=mu.$$

il faudra poser :

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots=\frac{du}{mu}$$

puis si on intègre en comparant la première à chacune

des suivantes on aura : $\frac{y}{x}=\alpha_1, \frac{z}{x}=\alpha_2, \ldots \frac{w}{x}=\alpha_{n-1}, \frac{u}{x^m}=\alpha_n$

et par suite $\frac{u}{x^m} = \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots \frac{w}{x}\right)$

ou $u = x^m \Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots \frac{w}{x}\right)$ ce qui prouve que cette propriété est exclusive aux fonctions homogènes.

Exemples dans lesquels l'une des quantités P, Q, R est nulle.

1°. $\frac{dz}{dx}=x^3y$. En regardant y comme constante et intégrant, il viendra : $z = \frac{x^4}{4}y + \varphi(y)$.

2°. $x^2y\frac{dz}{dy}+az=0$. Elle peut se mettre sous la forme :

$\frac{dz}{dy}+\left(\frac{a}{x^4}\right).\frac{1}{y}.z=0$; puis si l'on regarde y comme constant on a une équation linéaire privée de second membre qui intégrée donne : $z = Ce^{-\int\frac{a}{x^2}.\frac{1}{y}dy}$, ou en remplaçant C par une fonction arbitraire $\Phi(x)$.

$z - \Phi(x)\, e^{-\int\frac{a}{x^2}.\frac{1}{y}dy}$.

Or, $\int\frac{a}{x^2}.\frac{dy}{y}=\frac{a}{x^2}\int\frac{dy}{y}=\frac{a}{x^2}\log.y$. On aura donc :

$z = \Phi(x)e^{-\frac{a}{x^2}\log.y} = \Phi(x)\,y^{-\frac{a}{x^2}}$ on en tire :

$zy^{\frac{a}{x^2}} = \Phi(x)$ ou enfin $z^{x^2}y = \Psi(x)$.

Les mêmes principes peuvent quelquefois servir à ramener les équations aux différentielles partielles aux équations différentielles ordinaires.

Ainsi, si l'on a l'équation $\frac{d^2z}{dxdy}+a\frac{dz}{dx}=xy$. en

posant $\frac{dz}{dx}=p$ on aura : $\frac{d^2z}{dx\,dy}=\frac{dp}{dx}$ et la proposée de-
iendra : $\frac{dp}{dy}+dp=xy$ (relation qui rentre dans les cas
récédemment traités). On l'intégrera en y regardant y
mme constante et l'on aura :

$$=e^{-\int a\,dy}\left[\Phi(x)+\int e^{\int a\,dy}xy\,dy\right]=e^{-ay}\Phi(x)+e^{-ay}\int e^{ay}xy\,dy.$$

r, en intégrant par parties on a :

$$\int e^{a}\;y\,dy=\frac{x}{a}\int y\,d(e^{ay})=\frac{xy}{a}e^{ay}-\frac{x}{a}\int e^{ay}dy=\frac{e^{ay}}{a^2}(ay-1).$$

Donc $p=\frac{dz}{dx}=e^{-ay}\Phi(x)+\frac{x}{a^2}(ay-1)$

nfin, en intégrant cette nouvelle relation, il viendra :

$$z=\psi(y)+e^{-ay}\Phi_1(x)+\frac{x^2}{2a^2}(ay-1).$$

ns laquelle ψ et Φ, sont des fonctions arbitraires

Enfin, on remarquera que l'équation aux différentielles partielles $Pp+Qq=R$ qui dans le cas où x et y sont variables indépendantes a été ramenée à la résolution s équations simultanées $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$ sera ramenée
 même système dans le cas où l'on aurait pris x et z,
r exemple, pour variables indépendantes, car, en sup-
sant que $F(x,y,z)=0$ soit la relation qui satisfasse
l'équation différentielle on aura :

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dF}{dz}+\frac{dF}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

or, n avait : $\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dy}\cdot p=0,\quad \frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dz}q=0.$

on en déduira donc $\frac{dy}{dx} = -\frac{p}{q}$ et $\frac{dy}{dz} = \frac{1}{q}$

de sorte que la proposée qui peut se mettre sous la forme.

$P\frac{p}{q} + Q = \frac{R}{Q}$ deviendra en substituant et réduisant :

$P\frac{dy}{dx} + R\frac{dy}{dz} = Q$. Equation qui conduit bien encore à l'intégration des mêmes équations simultanées.

$$\frac{dx}{P} = \frac{dz}{R} = \frac{dy}{Q}.$$

Calcul des Variations.

Le but principal qu'on se propose dans le calcul des variations, est la résolution de certaines questions de maxima et de minima d'une nouvelle espèce. Dans les problèmes ordinaires de maxima et de minima, on suppose donnée une fonction d'une ou de plusieurs variables et on cherche les valeurs de ces variables qui donnent à la fonction une valeur maxima et minima; c'est-à-dire, une valeur plus grande ou plus petite que toutes celles qu'elle prend sous des valeurs très peu différentes des variables. Ici il n'en est plus de même. On suppose donnée une intégrale définie dans laquelle la fonction continue sous le signe $\int$, dépend de deux variables x et y et d'un certain nombre de dérivées de y prises par rapport à x, par exemple,

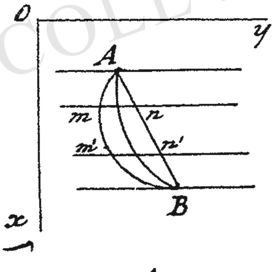
$\int_{x}^{x_1} f\left(x, y\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right) dx$, [$x_0$ et x_1 étant les valeurs extrêmes de x, ou répondant aux limites de l'intégrale.

Le but qu'on se propose dans cette nouvelle classe de questions, c'est de trouver une fonction de x $f(x)$, telle qu'en faisant $y=f(x)$ l'intégrale définie, écrite ci-dessus, ait une valeur maxima ou minima; c'est-à-dire, plus grande ou plus petite que toutes celles qu'elle pourrait prendre, si l'on faisait varier infiniment peu la forme de la fonction $f(x)$.

On voit, d'après cela, que ce qui distingue essentiellement ces nouvelles questions des équations ordinaires de maxima et de minima; c'est que dans celles-ci, on cherchait des valeurs particulières des variables indépendantes, tandis que dans les premières, c'est la forme d'une fonction de la variable qu'on se propose de déterminer.

On a beaucoup d'exemples de cette espèce. Par exemple, on peut se proposer ce problème:

Étant donné deux points A et B trouver la courbe que parcourrait dans un plan vertical et dans le vide un mobile pesant pour aller du point A au point B dans le temps le plus court.



On remarque d'abord que quelque soit la trajectoire parcourue par le mobile la vitesse pour tous les points d'une ligne de niveau mn sera la même car elle a pour expression: $V=\sqrt{2g(x-x_0)}$ en désignant par x et x_0 les abscisses des points m et A.

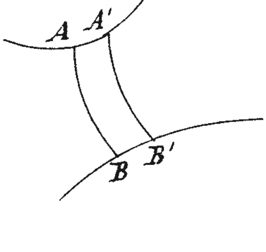
Si donc on mène deux lignes de niveau l'une mn près du point A, l'autre $m'n'$ près du point B on voit que l'on aura $Am < An$ et $Bm' > Bn'$ de sorte que l'on peut concevoir que le mobile ne doit pas nécessairement suivre la

ligne droite puisqu'en suivant la trajectoire courbe il sera moins de temps à parcourir l'arc Am, et qu'il en mettra plus à parcourir Bm'.

Cela posé, on a vu en mécanique que pour chaque instant du mouvement on avait la relation : $ds = v\,dt$ d'où $dt = \frac{ds}{v}$ et comme d'ailleurs $ds = dx\sqrt{1+p^2}$ et $v = \sqrt{2g.(x-x_0)}$ on aura $dt = \frac{\sqrt{1+p^2}.dx}{\sqrt{2g.(x-x_0)}}$. Alors pour avoir le temps que le mobile a mis pour arriver du point $A(x_0, y_0)$ au point $B(x_1, y_1)$ on aura :

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+p^2}.dx}{\sqrt{2g(x-x_0)}}$$ et c'est cette expression qui doit être un minimum pour une courbe d'une certaine forme $y = f(x)$ qu'il s'agit de déterminer.

Remarquons encore qu'au lieu d'assujettir le mobile à partir d'un point fixe A pour arriver à un autre point fixe B, nous eussions pu l'assujettir seulement à partir d'un point d'une certaine courbe AA' pour arriver en un point d'une autre courbe BB', de telle sorte que pour embrasser le problème dans toute sa généralité, il faudra non-seulement supposer que la forme de la fonction $f(x)$ varie mais encore que x varie aussi.



Cela posé, supposons que l'on ait une certaine fonction de x, $y = f(x)$; si d'abord on fait varier seulement la forme de la fonction son nouvel état pourra être représenté par $f(x) + \alpha F(x)$ [α étant une quantité très petite et $F(x)$ une

fonction arbitraire de x]: Si de plus on fait varier x, c'est-à-dire si l'on donne à x un accroissement très petit δx, la fonction sera définitivement devenue
$Y = f(x+\delta x) + \alpha F(x+\delta x)$ ou en développant le second membre par le moyen de la série de Taylor :

$$Y = f(x) + f'(x)\delta x + f''(x)\frac{(\delta x)^2}{1.2} + \cdots\cdots + \alpha F(x) + \alpha F'(x)\delta x + \cdots\cdots$$

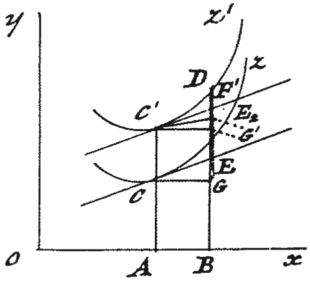
par conséquent l'altération de la fonction sera :

$$Y - f(x) = \underline{f'(x)\delta x + \alpha F(x)} + \left[f''(x)\frac{(\delta x)^2}{1.2} + \alpha F'(x)\delta x\right] + \text{etc}$$

Ici, comme dans le calcul différentiel, nous établissons par convention une définition, nous conviendrons d'appeler variation de la fonction $f(x)$ l'ensemble des termes du premier ordre de l'altération c'est-à-dire $f'(x)\delta x + \alpha F(x)$.

On remarquera alors que la variation d'une fonction quelconque de x. $f(x)$ se compose de $f'(x)\delta x$, c'est-à-dire de sa différentielle en supposant que la forme de la fonction ne change pas et que x seul varie, augmentée de $\alpha F(x)$, c'est-à-dire, de l'altération que subit la fonction lorsqu'elle seule se déforme.

Ce résultat peut avoir une interprétation géométrique.



Car, supposons que $y = f(x)$ représente une certaine courbe Cz, en faisant varier très peu la fonction on obtiendra une nouvelle courbe $C'z'$ voisine de la première et dont l'ordonnée aura pour expression : $f(x) + \alpha F(x)$.

Si maintenant, on donne à x un

accroissement $AB = \delta x$, le nouvel état de la fonction sera BD ou $f(x+\delta x) + \alpha F(x+\delta x)$, de telle sorte que pour avoir la variation, il faudra d'après notre définition calculer la différence $BD - AC$ à un infiniment petit du second ordre.

Or, si CF est la tangente à la courbe cz au point C et CG l'horizontale passant par ce même point on aura: $BD - AC = BD - BG = GE + ED$. Comme d'ailleurs on a dans le triangle ECG, $GE = p\,\delta x = f'(x)\,\delta x$, il en résultera que l'on aura: $BD - AC = f'(x)\,\delta x + \alpha F(x)$ en admettant que l'on ait $DE = CC' = \alpha F(x)$; il reste donc à faire voir que l'erreur que l'on commet est nulle à un infiniment petit du deuxième ordre près; pour cela imaginons que $C'E'$ soit la tangente à la courbe $C'Z'$, et $C'E_1$ et $C'G'$ des parallèles aux droites CE et CG, l'erreur que l'on commettra en supposant $ED = CC' = EE'$ sera $E_1E' = E'G' - E_1G'_E =$ $p'\,\delta x - p\,\delta x = (p' - p)\,\delta x$.

Or, on a évidemment: $p' = \dfrac{f(x+\delta x) + \alpha F(x+\delta x) - f(x) - \alpha F(x)}{\delta x}$

ou en développant et ne prenant que les infiniment petits du premier ordre $p' = f'(x) = p$, ou enfin $p - p = 0$.

D'après la définition établie, il sera facile de construire les variations des dérivées $p, q, r, \ldots$ etc, car y étant une fonction de x, ce seront aussi des fonctions de x auxquelles on pourra appliquer la règle précédemment démontrée.

En effet, si l'on suppose que la fonction seule change y devienne $y + \omega$, les dérivées $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ etc deviendront évidemment: $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{d\omega}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{d^2\omega}{dx^2}, \ldots$ etc.

de telle sorte que les variations de p et de q seront nécessai-

-mènent : $\delta p = q\,\delta x + \dfrac{d\omega}{dx}$

$\delta q = r\,\delta x + \dfrac{d^2\omega}{dx^2}$ et ainsi de suite.

On peut vérifier que si l'on a une fonction implicite de la forme : $F(x, y, p, q, \ldots)$ et que l'on forme

$F(x+\delta x, y+\delta y, p+\delta p, q+\delta q, \ldots)$

($\delta y, \delta p, \delta q, \ldots$ ayant les valeurs précédemment déterminées) on aura la variation de la fonction en se bornant aux termes du premier degré.

En effet, en développant cette dernière fonction par la série de Taylor il vient :

$$F(x, y, p, q, \ldots) + F'(x)\delta x + F'(y)\delta y + F'(p)\delta p)\delta p + F'(q)\delta q + \cdots$$

et alors la différence des deux états de la fonction sera :

$F'(x)\delta x + F'(y)\delta y + F'(p)\delta p + F'(q)\underline{\delta q} + \cdots$ ou en remplaçant $\delta y, \delta p, \delta q$ par les valeurs et ordonnant :

$$\left[F'(x) + F'(y)p + F'(p)q + F'(q)r + \cdots\cdots\right]\delta x$$
$$+ F'(y)\omega + F'(p)\frac{d\omega}{dx} + F'(q)\frac{d^2\omega}{dx^2} + \cdots\cdots$$

La première ligne représente évidemment la différentielle de F par rapport à x, et la seconde l'altération que subit F lorsque f se déforme car alors pour cette seule déformation F deviendra : $F\left(x, y+\omega, p+\dfrac{d\omega}{dx}, \ldots\right)$ et la différence des deux états en supposant toujours qu'on ne prend que les termes du premier degré seront bien égale à

$$F'(y)\omega + F'(p)\frac{d\omega}{dx} + F'(q)\frac{d^2\omega}{dx^2} + \cdots\cdots$$

Il résulte de la nature même des démonstrations employées pour établir les principes du calcul différentiel que tant qu'l'on ne considère que des règles ayant rapport au calcul des variations proprement dit, elles seront les mêmes que pour le calcul différentiel, La seule différence qu'il y aurait c'est que dans ce dernier calcul, l'accroissement donné à y provient de l'accroissement donné à x, tandis que dans le calcul des variations cet accroissement provient de l'accroissement de la variable et de la déformation de la fonction.

Nous pourrons le vérifier par les deux cas qui suivent :

1°. Variation d'une somme — On devra avoir $\delta(u+v)=\delta u+\delta v$, car, lorsque la variable et la fonction auront varié, on aura par définition en désignant par U et V les nouveaux états des fonctions u et v

$U=u+\delta u+\varepsilon_1$ (ε_1 et ε_2 constituant des cas semblables
$V=v+\delta v+\varepsilon_2$ d'infiniment petits du deuxième ordre).

Alors ajoutant il viendra :

$$(U+V)-(u+v)=\delta u+\delta v+\varepsilon_1+\varepsilon_2 .$$

et si pour nous conformer à la définition établie nous ne prenons que l'ensemble des termes du premier degré, nous aurons :

$$\delta(u+v)=\delta u+\delta v.$$

Vérifions-le encore par la variation d'un produit uv. On aura encore les deux mêmes relations que précédemment et en multipliant et négligeant les termes du deuxième ordre, il viendra :

$UV=uv+u\delta v+v\delta u+\ldots$ et par suite on aura :
$\delta(uv)=u\delta v+v\delta u.$

Il ne peut y avoir de principes nouveaux que lorsqu'on combine le calcul différentiel avec le nouveau calcul.

Or, on peut d'abord voir que l'on a la relation : $\delta du = d.\delta u$.

Car, si nous supposons que U soit le nouvel état de la fonction on aura d'abord en développant :

$$(1)\quad U = u + du + \frac{d^2u}{1.2} + \frac{d^3u}{1.2.3} + \dots$$

puis en prenant la variation :

$$\delta U = \delta u + \delta du + \delta\left(\frac{d^2u}{1.2}\right) + \dots$$

Maintenant puisque la relation (1) a lieu quelque soit la fonction u, on peut l'appliquer à la fonction δu ce qui donnera :

$$\delta U = \delta u + d\delta u + \frac{d^2\delta u}{1.2} + \frac{d^3(\delta u)}{1.2.3} + \dots$$

On a alors deux développements d'une même quantité qui doivent être identiques ; comme d'ailleurs ils ont le même premier terme δu on en déduira en identifiant les seconds $\delta du = d\delta u$. On pourrait encore en tirer d'autres relations ; mais elles ne nous seront pas actuellement nécessaires.

On en déduit facilement que $\delta\int Vdx = \int\delta(Vdx)$. car si l'on pose $\int Vdx = U$ il viendra en différentiant $Vdx = dU$; en variant on aura : $\delta Vdx = \delta dU = d.\delta U$ alors il suffira d'intégrer et l'on aura :

$$\int\delta(Vdx) = \delta\int Vdx + C.$$

Il faut remarquer que dans le cas que nous considérons,

c'est-à-dire, lorsque l'intégrale est définie la constante disparaît; car on a évidemment :

$\int_{x_0}^{x_1} \delta(V dx) = \delta U_1 - \delta U_0$ (en désignant par U_0, U_1 les valeurs de l'intégrale pour $x = x_1$ et $x = x_0$)

$= \delta(U_1 - U_0) = \delta\int_{x_0}^{x_1} V dx$.

Ces principes une fois posés, cherchons la variation $\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx$ en admettant que V soit une fonction $f(x, y, p, q)$ telle que si on la différentie on ait : $dV = M dx + N dy + P dp + Q dq$.
Il en résultera nécessairement : $\delta V = M\delta x + N\delta y + P\delta p + Q\delta q$.

Or, on a : $\delta\int V dx = \int \delta(V dx) = \int \delta V dx + \int V d\delta x$.

En intégrant par parties, la seconde de ces intégrales on aura :

$\int V d\delta x = V\delta x - \int \delta x\, dV$: il viendra donc :

$\delta\int V dx = V\delta x + \int \delta V dx - \delta x\, dV$.

Or, si nous formons le facteur $\delta V dx - \delta x\, dV$ en remplaçant δV et dV par leurs valeurs précédemment établies, il viendra

$\delta V dx - \delta x\, dV = M\delta x\, dx - M dx\, \delta x + N(dx\,\delta y - \delta x\, dy)$

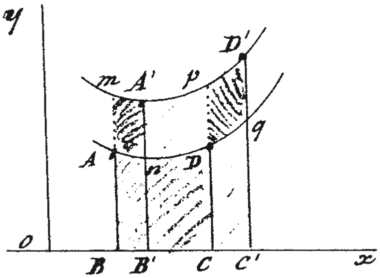
$+ P(dx\,\delta p - \delta x\, dp) + Q(dx\,\delta q - \delta x\, dq)$.

Or, en se rappelant les valeurs de δy, δp, δq on aura :
$dx\,\delta y - \delta x\, dy = dx(p\,\delta x + \omega) - \delta x\, dy = \omega\, dx$; on trouverait de la même manière : $dx\,\delta p - \delta x\, dp = \frac{d\omega}{dx} dx$ et $dx\,\delta q - \delta x\, dq = \frac{d^2\omega}{dx^2} dx$ de sorte qu'en substituant ces valeurs et rétablissant les limites de l'intégrale, il viendra :

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = V_1 \delta x_1 - V_0 \delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1}\left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)dx.$$

On peut encore établir géométriquement cette relation.

En effet, la fonction V peut être considérée comme l'ordonnée d'une courbe $AnDq$ dont l'aire comprise entre les abscisses x_0 et x_1 sera égale à $\int_{x_0}^{x_1} V dx$.



Si maintenant on fait $x_0 = x_0 + \delta x_0$, $x_1 = x_1 + \delta x_1$ et $y = y + \delta y$, on passera à une autre courbe très voisine $A'pD'$ et la différence entre les aires $A'B'C'D'$ et $ABCD$ sera précisément la variation cherchée.

Or on a : $A'B'C'D' - ABCD = DCC'q + nDpA' - ABB'n$ en négligeant les petits rectangles curvilignes $DqD'p$, $AnA'm$, qui sont des infiniment petits du deuxième ordre. Or, on a déjà évidemment $DCC'q$ et $ABB'n$ égaux à $V_1\delta x_1$ et $V_0\delta x_0$; maintenant si on désigne par V' ce que devient V lorsque y, p, q sont augmentées de leurs altérations $nDpA'$ sera évidemment $\int_{x_0+\delta x_0}^{x_1}(V' - V)dx$, ou en négligeant δx_0 dans la limite inférieure, c'est-à-dire, en négligeant un élément infiniment petit par rapport à l'intégrale définie $\int_{x_0}^{x_1}(V' - V)dx$; d'ailleurs $V' - V$ est l'altération de la fonction et par conséquent égal à $N\omega + P\dfrac{d\omega}{dx} + Q\dfrac{d^2\omega}{dx^2}$ de sorte que l'on aura bien enfin :

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = V_1 \delta x_1 - V_0 \delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2}\right) dx.$$

Dans l'expression de $\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx$ que nous avons déterminée on peut ramener les termes qui se trouvent sous le signe $\int$ à ne contenir que ω.

En effet, en intégrant par parties

$$(2)\ \int P\frac{d\omega}{dx}dx = P\omega - \int \omega \frac{dP}{dx} dx.$$

Remarquons qu'ici $\frac{dP}{dx}$ est une dérivée totale c'est

$\frac{dP}{dx} + \frac{dP}{dy}p + \frac{dP}{dp}q + \frac{dP}{dq}r + \dots$ et pour éviter toute confusion à cet égard, nous ne nous servirons de la notation des dérivées dans ce calcul que pour désigner des dérivées totales.

En intégrant encore par parties, on aura :

$$(3)\ \int Q\frac{d^2\omega}{dx^2}dx = Q\frac{d\omega}{dx} - \int \frac{d\omega}{dx}\cdot\frac{dQ}{dx}dx = Q\frac{d\omega}{dx} - \omega\frac{dQ}{dx} + \int \omega \frac{d^2Q}{dx^2}dx.$$

On aurait de même

$$(4)\ \int R\frac{d^3\omega}{dx^3}dx = R\frac{d^2\omega}{dx^2} - \frac{dR}{dx}\frac{d\omega}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\cdot\frac{d\omega}{dx} - \int\omega\frac{d^3R}{dx^3}dx$$

et ainsi de suite.

Il viendra donc enfin en substituant ces valeurs de (2), (3), (4)... dans (1) et ordonnant par rapport à $\omega \frac{d\omega}{dx}, \frac{d^2\omega}{dx^2}, \dots\dots$

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = \left[V\delta x + \omega\left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2}\dots\right) + \frac{d\omega}{dx}\left(Q - \frac{dr}{dx} + \dots\right) + \frac{d^2\omega}{dx^2}(R -) + \dots\right]_{x_0}^{x_1}$$

$$+\int_{x_0}^{x_1}\omega\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\cdots\right)dx.$$

On peut résumer le calcul précédent en mettant la variation de l'intégrale sous la forme :

$$\delta\int_{x_0}^{x_1}V\,dx=\psi_1-\psi_0+\int_{x_0}^{x_1}\omega\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}-\frac{d^3R}{dx^3}+\cdots\right)dx.$$

Cherchons maintenant quelle est la relation qu'il faudrait établir entre y et x pour que l'intégrale définie $\int_{x_1}^{x_2}V\,dx$ soit un maximum ou un minimum. Si cette relation était trouvée, en la changeant arbitrairement, l'accroissement correspondant de l'intégrale définie devrait avoir toujours le même signe, et par suite on en conclura comme dans la théorie ordinaire des maxima que la condition nécessaire est que la variation soit nulle pour que l'on ait un maximum et un minimum. D'ailleurs nous n'aurons pas à examiner si c'est un maximum ou un minimum car dans chaque cas particulier que nous traiterons, la nature même de la question nous indiquera ce que nous devons trouver.

On devra donc avoir nécessairement :

$$\psi_1-\psi_0+\int_{x_0}^{x_1}\omega\left(N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}\right)dx=0$$ en supposant que V soit seulement : $f(x,y,p,q)$.

Il faut remarquer que cette condition se dédouble et donne $\psi_1-\psi_0=0$ et $N-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0$.

En effet dans le cas où les limites x_0 et x_1 sont fixes

ω_0 et ω_1 seront nuls car δx_0, δx_1, δy_0, δy_1 sont nuls et par suite $\psi_1 - \psi_0$ sera nul, il en résultera donc que l'intégrale devra être nulle, et par suite comme ω est une fonction arbitraire il faudra que l'on ait : $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}$.

De ce cas on peut passer à celui où les limites sont variables, car en supposant le problème résolu, on aura trouvé une courbe qui partira de deux points déterminés et qui satisfera à la condition d'être un maximum ou un minimum ; comme d'ailleurs entre ces limites considérées comme fixes, la fonction ne cessera pas d'être un maximum ou un minimum, on retombera dans le cas précédent et il faudra encore que l'on ait les mêmes relations.

On pourrait encore dire que dans le cas où l'on considérerait ces limites déterminées de manière à satisfaire à la question $\psi_1 - \psi_0$ ne pourrait pas satisfaire à la relation

$$\psi_1 - \psi_0 = -\int_{x_0}^{x_1} \omega\left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2}\right) dx.$$

Car on devrait avoir une quantité parfaitement déterminée égale à une fonction arbitraire.

L'équation différentielle $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$ (1) est dite <u>équation indéfinie</u>; elle sert à déterminer la fonction qui répond à la question. On voit immédiatement qu'elle est de degré pair et double de celui de $V = f(x, y, p, q)$. Ce résultat est général et l'on peut aisément le vérifier dans chaque cas particulier.

Enfin la relation $\psi_1 - \psi_0 = 0$ que l'on appelle

Équation aux limites, sert dans chaque application à déterminer les constantes introduites par l'intégration.

Nous allons montrer comment l'équation indéfinie peut se simplifier dans plusieurs cas.

1°. $N=0$. Dans ce cas, l'équation (1) se réduit à $-\frac{dP}{dx}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0$ et on a immédiatement une intégrale première $P-\frac{dQ}{dx}=C$.

2°. $M=0$. Rappelons nous que :
$dV=Mdx+Ndy+Pdp+Qdq$; il viendra alors en mettant à la place de N sa valeur tirée de (1).

$dV=\frac{dP}{dx}dy-\frac{d^2Q}{dx^2}dy+Pdp+Qdq$ ou comme $dy=pdx$ et $dy=\frac{dq}{dx}dx$.

$$dV=dx\left(p\frac{dP}{dx}+P\frac{dp}{dx}\right)+dx\left(Q\frac{d^2p}{dx^2}-p\frac{d^2Q}{dx^2}\right),$$

le premier terme est la différentielle de Pp, le second est la différentielle de $Q\frac{dp}{dx}-p\frac{dQ}{dx}$, donc en intégrant

$V=Pp+Q\frac{dp}{dx}-p\frac{dQ}{dx}+C$; cette équation est une intégrale première de (1).

3°. $\begin{cases}M=0\\N=0\end{cases}$ On peut appliquer à ce cas les simplifications des premiers et on a les deux intégrales premières :

$$P-\frac{dQ}{dx}=C,\quad V=Pp+Q\frac{dp}{dx}-p\frac{dQ}{dx}+C'.$$

On peut même trouver une intégrale seconde de

l'équation (1); en effet, si nous éliminons $\frac{dQ}{dx}$ entre ces deux equations: $V = Cp + Q\frac{dp}{dx} + C' = Cp + Qq + C'$, l'équation différentielle ainsi obtenue n'est plus que du second ordre, tandis que l'équation est en général du quatrième.

1^er^. Problème. Déterminer le plus court chemin entre deux courbes.

L'intégrale qui doit être un minimum est:

$$\int_{x_0}^{x_1} ds = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\,dx, \text{ on a}: N=0, P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}, Q=0,$$

l'équation (1) se réduit à $\frac{dP}{dx} = 0$ d'où $P = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \text{const.}$

On en tire $p = C$ et par suite $y = Cx + C'$, la forme de la courbe cherchée est donc la ligne droite.

Déterminons maintenant les limites entre lesquelles il faudra la mener; pour cela on aura recours à l'équation aux limites qui dans ce cas se réduit à

$$\Big[V\delta x + P\omega\Big]_{x_0}^{x_1} = \Big[V\delta x + P(\delta y - p\,\delta x)\Big]_{x_0}^{x_1} = 0.$$

Remarquons encore que si le point $[x_0, y_0]$ et le point $[x_1, y_1]$ sont assujettis à demeurer sur des courbes dont les équations seraient $y = f(x)$, $y = F(x)$ on devra avoir $\delta y_0 = f'(x_0)\,\delta x_0$, $\delta y_1 = F'(x_1)\,\delta x_1$ car on passe d'un point d'une courbe à un autre point d'une même courbe, cela revient à dire que dans ce cas la valeur de ω est nulle.

Cela posé, en reportant ces valeurs dans l'équation indéfinie, et développant elle deviendra:

$$\Big[V_1 - P_1 p_1 + P_1 F'(x_1)\Big]\delta x_1 - \Big[V_0 - P_0 p_0 + P_0 f'(x_0)\Big]\delta x_0 = 0,.$$

et comme δx_1 et δx_0 sont des valeurs tout à fait arbitraires, on devra avoir les deux relations :
$V_1 - P_1 p_1 + P_1 F'(x_1) = 0$ et si l'on remplace V et P par
$V_0 - P_0 p_0 + P_0 f'(x_0) = 0$ leurs valeurs, $\sqrt{1+p^2}$ et $\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ il viendra :
$\begin{cases} 1 + p_1 F'(x_1) = 0 \\ 1 + p_0 f'(x_0) = 0 \end{cases}$ relations qui indiquent bien que la droite est normale aux deux courbes ; d'ailleurs ces deux conditions suffisent pour déterminer C et C'.

On peut même voir que dans le cas plus général où V est de la forme $F(x,y)\sqrt{1+p^2}$, la courbe qui répond à la question sera toujours perpendiculaire aux deux courbes que l'on aura pris pour limites. Car dans ce cas on aura encore : $\psi = V\delta x + P\omega$ ou $\psi = F(x,y)\sqrt{1+p^2}\,\delta x + \dfrac{F(x,y)}{\sqrt{1+p^2}}(\delta y - p\,\delta x)$
$= \dfrac{F(x,y)}{\sqrt{1+p^2}}\left[\delta x + p\,\delta y\right]$ et l'on en déduira comme précédemment en formant $\psi_1 - \psi_0$ les deux relations $1 + p_0 \dfrac{\delta y_0}{\delta x_0} = 0$, $1 + p_1 \dfrac{\delta y_1}{\delta x_1} = 0$ qui vérifient bien la condition énoncée.

2e Problème. Parmi toutes les courbes planes qu'on peut trouver entre deux points donnés, quelle est celle qui donne une aire de révolution minima en tournant autour d'un axe situé dans ce plan ?

En prenant cet axe pour axe des x, il faudra rendre un minimum l'intégrale définie $2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\,ds$ ou seulement $\int_{x_0}^{x_1} y\,ds$

On a ici $M = 0$, $Q = 0$ et par suite on aura l'intégrale première $V = Pp + C$. Or, $P = \dfrac{py}{\sqrt{1+p^2}}$, substituant cette valeur et réduisant, il viendra : $y = C\sqrt{1+p^2}$. On en

entire p ou $\frac{dy}{dx}$ et en résolvant par rapport à dx :

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}} \text{ d'où } x + C' = \int \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}} = C \int \frac{d\left(\frac{y}{c}\right)}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}}$$

et, par conséquent :

$$\frac{x + c'}{c} = \log.\left(y + \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}\right) \text{ on en tire :}$$

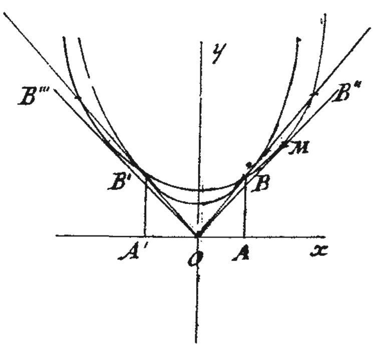
$$e^{\frac{x+c'}{c}} = \frac{y}{C} + \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}$$ on aurait aussi comme on le vérifie aisément :

$$e^{-\frac{x+c'}{c}} = \frac{y}{C} - \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}$$; on en tirera par l'addition de ces deux dernières relations :

$$y = \frac{C}{2}\left(e^{\frac{x+c'}{c}} + e^{-\frac{x+c'}{c}}\right)$$ qui représente l'équation de la chaînette.

On déterminera les constantes C et C' par les deux conditions que la courbe passe par les deux points donnés.

Dans ce dernier problème, supposons que les deux points limites soient donnés à égale hauteur au dessus de l'axe des x et prenons pour axe des y la perpendiculaire élevée par le point O milieu de AA'. En posant : $AB = A'B' = b$ et $OA = OA' = a$, on devra avoir en exprimant que la courbe passe par ces deux points les relations.



$$b=\frac{C}{2}\left[e^{\frac{a}{c}}e^{\frac{c'}{c}}+e^{-\frac{a}{c}}e^{-\frac{c'}{c}}\right]$$

$$b=\frac{c}{2}\left[e^{-\frac{a}{c}}e^{\frac{c'}{c}}+e^{\frac{a}{c}}e^{-\frac{c'}{c}}\right]$$

et en égalant ces deux valeurs de b et ordonnant:

$$e^{\frac{c'}{c}}\left[e^{\frac{a}{c}}-e^{-\frac{a}{c}}\right]+e^{-\frac{c'}{c}}\left[e^{-\frac{a}{c}}-e^{\frac{a}{c}}\right]=0 \quad \text{ou:}$$

$$\left[e^{\frac{a}{c}}-e^{-\frac{a}{c}}\right]\left[e^{\frac{c'}{c}}-e^{-\frac{c'}{c}}\right]=0$$

Le premier facteur égalé à zéro donnerait $e^{\frac{2a}{c}}=1$ relation qui ne pourra être satisfaite que par $c=\infty$.

Nous rejetons cette solution car elle ne donne rien. Le second facteur donnera de même $e^{\frac{2c'}{c}}=1$ et comme nous avons rejeté la solution $c=\infty$ il faudra que l'on ait $C'=0$.

L'équation de la courbe deviendra alors:

$y=\frac{c}{2}\left[e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}}\right]$ et les deux ordonnées des points B et B' seront calculées par la condition: $b=\frac{c}{2}\left[e^{\frac{a}{c}}+e^{-\frac{a}{c}}\right]$.

Si l'on pose: $\frac{a}{c}=t$ cette dernière condition deviendra:

$\frac{b}{a}t=\frac{1}{2}\left[e^{t}+e^{-t}\right]$ qui pourra être encore représenté par l'ensemble des deux relations:

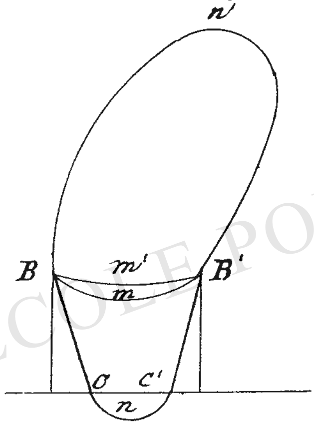
$$\begin{cases} u=\frac{b}{a}t & (1). \\ u=\frac{1}{2}\left[e^{t}+e^{-t}\right] & (2). \end{cases}$$

Chacune d'elles représente un lieu géométrique que l'on sait construire et si l'on imagine que B O soit la ligne droite représentée par (1) et B''B B' B''' la chaînette représentée par (2) on voit que généralement elles se couperont en deux points B et B' car la chaînette jouit de la

propriété de tourner constamment sa convexité vers l'axe des x.

Il reste à voir à laquelle de ces deux solutions correspondent le maximum et le minimum, or la discussion suivante lèvera facilement la difficulté, car nous allons montrer que le maximum devra nécessairement se trouver au dessous du minimum.

En effet, imaginons que B m B' soit la courbe qui corresponde au maximum; les aires engendrées par toutes les courbes qui se trouveront au dessous iront constamment en diminuant car si l'on considère une courbe telle que B n B' on voit qu'elle engendrera une surface en partie positive, en partie négative, et il est évident que l'on arrivera à une certaine courbe telle que celle-ci pour laquelle la surface engendrée sera algébriquement nulle; et à partir de celle là toutes les surfaces engendrées auront des expressions algébriques négatives.



Considérons maintenant les courbes situées au dessus de B m B', les surfaces engendrées iront encore en diminuant jusqu'à une certaine limite car dans le voisinage elles doivent être plus petites, mais il est clair que comme on peut considérer une courbe B n' B' engendrant une surface elles auront dû croître à partir d'une certaine courbe située au dessus de B m B' et qui correspondra au minimum.

On peut voir que dans chaque cas particulier on a assez

d'équations de condition pour déterminer les inconnues de la question.

En effet, on a vu que l'on avait à intégrer l'équation du 4^e degré : $N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} = 0$. En supposant l'intégration faite, on aura pour résultat, $y = \mathrm{f}(x, c, c', c'', c''')$; c, c', c'', c''' étant quatre constantes arbitraires. Pour les déterminer, il faut avoir égard à l'équation $\psi_1 - \psi_0 = 0$ qui se rapporte aux limites de l'intégration.

Mais il est nécessaire pour cela de distinguer plusieurs cas :

Et d'abord supposons qu'on se donne les valeurs de x, y, p relatives aux deux limites. Soient $x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1$, ces valeurs extrêmes. Leurs variations étant nulles à chaque limite, l'équation $\psi_1 - \psi_0 = 0$ est identiquement satisfaite. Mais, si l'on représente par $\mathrm{f}'(x, c, c', c'', c''')$ la dérivée par rapport à x de la fonction $\mathrm{f}(x, c, c', c'', c''')$ on aura pour déterminer les constantes, c, c', c'', c''', les quatre équations :

$$y_0 = \mathrm{f}(x_0, c, c', c'', c'''), \quad y_1 = \mathrm{f}(x_1, c, c', c'', c''')$$
$$p_0 = \mathrm{f}'(x_0, c, c', c'', c'''), \quad p_1 = \mathrm{f}'(x_1, c, c', c'', c''').$$

Supposons maintenant que pour les conditions de la question une des six quantités, $x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1$ reste indéterminée, que ce soit p_1, par exemple. Comme dans cette hypothèse, δp_1 reste arbitraire, l'équation $\psi_1 - \psi_0 = 0$ donne une relation $P_{(1)} = 0$. On a en outre les quatre équations écrites ci-dessus, ce qui fait en tout cinq équations pour déterminer p_1 et les quatre constantes cherchées c, c', c'', c'''.

Enfin, on peut avoir des conditions plus générales résultant de la nature du problème. Par exemple, on peut

avoir entre les valeurs de x, y, p relations aux limites une seule relation telle que :

$\Phi(x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1) = 0$.

Voici quel usage on fera de cette équation. Puisque la fonction $\Phi = 0$ sa variation sera nulle et l'on aura :

$$\frac{d\Phi}{dx_0}\delta x_0 + \frac{d\Phi}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\Phi}{dp_0}\delta p_0 + \frac{d\Phi}{dx_1}\delta x_1 + \frac{d\Phi}{dy_1}\delta y_1 + \frac{d\Phi}{dp_1}\delta p_1 = 0.$$

On pourrait tirer de là la valeur d'une des variations relatives à l'une des limites, par exemple, δp_1 en fonction des autres. En portant cette valeur dans la relation $\psi_1 - \psi_0 = 0$, on aurait en égalant à 0, les coefficients de $\delta x_0, \delta y_0, \delta p_0, \delta x_1$ et δp_1, cinq équations qui avec $\Phi = 0$ et avec les quatre équations déjà considérées dans les deux cas précédents, fourniraient en tout dix équations propres à déterminer les six quantités, $x_0, y_0, p_0, x_1, y_1, p_1$, et les quatre constantes c, c', c'', c'''.

On voit comment il faudrait faire si, au lieu de l'équation $\Phi = 0$, on en avait deux $\Phi = 0, \Psi = 0$. On verrait que l'on aurait toujours un nombre suffisant d'équations pour faire connaître les constantes.

Dans le cas où la fonction V contient les variables qui se rapportent aux limites de l'intégration, il faudrait ajouter à la variation de l'intégrale calculée précédemment les termes qui proviennent de la variation de ces limites, ce qui serait, d'après les règles précédentes :

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dV}{dx}\delta x_0 + \frac{dV}{dy_0}\delta y_0 + \frac{dV}{dp_0}\delta p_0 + \frac{dV}{dq_0}\delta q_0\right)dx +$$

$$\int_{x_0}^{x_1}\left(\frac{dV}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dV}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dV}{dp_1}\delta p_1 + \frac{dV}{dq_1}\delta q_1\right)dx,$$

ou, comme $\delta x_0, \delta y_0, \ldots$ sont des constantes dans l'intégration qui est relative à x

$$\delta x \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_0}\,dx + \delta y_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_0}\,dx + \cdots\cdots +$$

$$\delta x_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_1}\,dx + \delta y_1 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_1}\,dx + \cdots\cdots$$

Tels sont les termes qu'il faudrait ajouter à $\psi_1 - \psi_0$; les intégrales $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_0}\,dx, \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dy_0}\,dx, \ldots\ldots$

ne renfermant rien qui dépende des variations indiquées par δ. Dans le cas où V ne contenait qu'une fonction de x on a trouvé $\delta\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \psi_1 - \psi_0 + \int_{x_0}^{x_1} K\omega\,dx$.

Supposons maintenant que la fonction V contienne deux fonctions y et z de x et par conséquent soit de la forme $V = f(x, y, p, q, z, p', q')$

On trouvera en effectuant des calculs exactement identiques à ceux où V ne contenait que x, y, p, q

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V\,dx = \chi_1 - \chi_0 + \int_{x_0}^{x_1} (X\omega + K'\omega')\,dx$$

K' et ω' se déduisant de K et ω en y changeant ce qui est relatif à y en ce qui est relatif à z et χ se composant de ψ auquel on aura ajouté les termes analogues en ω' et $\frac{d\omega'}{dx}$.

D'ailleurs la condition de maximum ou de minimum sera toujours la même, ce qui donnera encore :

$$\chi_1 - \chi_0 + \int_{x_0}^{x_1} (X\omega + K'\omega')\,dx = 0.$$

Pour les mêmes raisons encore que dans d'une fonction cette relation se dédouble et donne :

$$\chi_1 - \chi_0 = 0 \quad (K\omega + K'\omega')\,dx = 0.$$

et comme d'ailleurs ω et ω' sont tout à fait indépendants l'un de l'autre cette dernière relation donnera encore $K=0$ et $K'=0$, ou

$N - \dfrac{dP}{dx} + \dfrac{d^2Q}{dx^2} = 0$ Ce sont deux équations différentielles

$N' \dfrac{dP'}{dx} + \dfrac{d^2Q'}{dx^2} = 0$ simultanées qui intégrées donneront $y = f(x, c, c', c'', c''')$, $z = \varphi(x, c, c', c'', c''')$ et l'équation $\chi_1 - \chi_0 = 0$ servira à déterminer ces constantes arbitraires.

Nous venons d'admettre que y et z étaient indépendantes. Supposons les maintenant liées entre elles par une équation telle que $F(x,y,z)=0$. On aura encore :

$\dfrac{dF}{dx}\delta x + \dfrac{dF}{dy}\delta y + \dfrac{dF}{dz}\delta z = 0$. Dans ce cas les variations δy et δz ne sont plus indépendantes ; mais on a entre elles la relation résultant de l'équation précédente. Remplaçons y δy et δz par les valeurs $p\delta x + \omega$, $p'\delta x + \omega'$ et il vient :

$$\delta x \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}(p\delta x + \omega) + \frac{dF}{dz}(p'\delta x + \omega') = 0$$

$$\left[\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}p + \frac{dF}{dz}p'\right]\delta x + \frac{dF}{dy}\omega + \frac{dF}{dz}\omega' = 0, \text{ ou enfin}$$

$$\frac{dF}{dy}\omega + \frac{dF}{dz}\omega' = 0, \text{ car on a } \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy}p + \frac{dF}{dz}p' = 0,$$

en différentiant l'équation $F(x,y,z)=0$. Par conséquent.

on a $\omega' = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}\,\omega$ et $\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = X_1 - X_0 + \int_{x_0}^{x_1}\left(K - K'\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}\right)\omega\, dx.$

Ainsi, dans ce cas, on aura $X_1 - X_0 = 0$ et $K\frac{dF}{dz} - K'\frac{dF}{dy} = 0$

à laquelle équation il faudra joindre $F(x,y,z)=0$. Ces deux dernières équations feront connaître les valeurs générales de y et de z en fonction de x et l'équation $X_1 - X_0 = 0$ servira à la détermination des constantes.

Nous allons établir par le fait même de notre définition de la variation plusieurs résultats déjà obtenus directement.

Ainsi, si nous cherchons $\delta\left(\int V dx\right)$ nous devrons prendre d'abord la différentielle de $\int V dx$ dans laquelle on a soin de remplacer dx par δx et y ajouter l'accroissement que prend cette fonction lorsque y devient $y+\omega$; or nous avons vu que si $V = f(x, y, p, q)$ son altération correspondante était égale à

$N\omega + P\dfrac{d\omega}{dx} + Q\dfrac{d^2\omega}{dx^2}$ de telle sorte que l'altération de $\int V dx$

sera $\int\left(N\omega + \dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{d^2\omega}{dx^2}\right)dx$ et par suite en prenant les limites:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = \Big[V\delta x\Big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1}\left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)dx.$$

Il en sera de même pour le cas où l'on aurait:
$V = f(x, y, p, q, z, p', q')$ seulement dans ce cas l'altération de V'

était $N\omega + P\dfrac{d\omega}{dx} + Q\dfrac{d^2\omega}{dx^2} + N'\omega' + P'\dfrac{d\omega'}{dx} + Q'\dfrac{d^2\omega'}{dx^2}$.

On aura:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = \Big[V\delta x\Big]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} dx\left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + N'\omega' + P'\frac{d\omega'}{dx} + Q'\frac{d^2\omega'}{dx^2}\right).$$

Considérons enfin le cas où V contiendrait d'autres variables indépendantes que x telles que x_0 et x_1. Alors l'altération totale de V obtenue dans les cas précédents devra être augmentée des termes correspondant à l'altération de ces deux nouvelles variables et ces termes seront de la forme:
$G_0\,\delta x_0 + G_1\,\delta x_1$ (G_1 et G_0 représentant les dérivées de V par rapport à x_0 et x_1) et dans ce cas il viendra:

$$\delta\int_{x_0}^{x_1} V dx = \left(V\delta x\right)_{x_0}^{x_1} + dx\int_{x_0}^{x_1} G_0\, dx + \delta x_1\int_{x_0}^{x_1} G_1\, dx + \int_{x_0}^{x_1}\left(N\omega + P\frac{d\omega}{dx} + Q\frac{d^2\omega}{dx^2} + N'\omega' + P'\frac{d\omega'}{dx} + Q'\frac{d^2\omega'}{dx^2}\right)dx.$$

On remarquera que ces nouveaux termes ajoutés n'altèrent

par l'équation indéfinie puisqu'ils sont indépendants de ω et de ses dérivées ; ils altèrent seulement l'équation aux limites et même si l'on suppose que cette équation soit mise sous la forme $\psi_1 - \psi_0 = 0$ on voit que les termes relatifs à x_1 altéreront seulement ψ_1 ; il en sera de même pour ψ_0.

La courbe représentée par la fonction rend minimum intégrale définie de la forme : $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z)\sqrt{1+p^2+p'^2}$ jouit

quelque soit sa nature, de la propriété d'être normale aux courbes et aux surfaces auxquelles elle doit être limitée

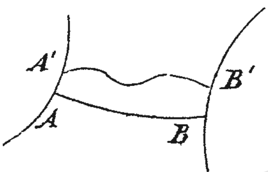
En effet, dans ce cas l'équation aux limites se réduit à

$\left[V\delta x + \omega P + \omega' P'\right]_{x_0}^{x_1} = 0$ ou en substituant à la place de V, P et P' leurs valeurs : $F(x,y,z)\sqrt{1+p^2+p'^2}$,

$F(x,y,z)\dfrac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}}$, $F(x,y,z)\dfrac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}}$ et réduisant :

$$\left[\frac{F(x,y,z)}{\sqrt{1+p^2+p'^2}}\left(\delta x + p\,\delta y + p'\,\delta z\right)\right]_{x_0}^{x_1} = 0.$$

On devra donc avoir en remplaçant p et p' par leurs valeurs $\dfrac{dy}{dx}$ et $\dfrac{dz}{dx}$ $\left[dx\,\delta x + dy\,\delta y + dz\,\delta z\right]_{x_0}^{x_1} = 0\ (\alpha)$, et si l'on désigne par $\delta\sigma_0$ et $\delta\sigma_1$ les arcs infiniment petits AA' et BB' situés sur les courbes ou sur les surfaces auxquelles doit se terminer la courbe AB satisfaisant



par hypothèse à la question et $A'B'$ une courbe infiniment voisine on pourra évidemment mettre (α)

sous la forme :

$$\delta\sigma_1\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma}+\frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma}+\frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)_{x_1}-\delta\sigma_0\left(\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma}+\frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma}+\frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right)=0.$$

Comme d'ailleurs $\delta\sigma_0$ et $\delta\sigma_1$ sont des quantités tout-à-fait arbitraires et indépendantes les unes des autres, on devra avoir séparément :

$$\left[\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma}+\frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma}+\frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right]_{x_1}=0.$$

$$\left[\frac{dx}{ds}\frac{\delta x}{\delta\sigma}+\frac{dy}{ds}\frac{\delta y}{\delta\sigma}+\frac{dz}{ds}\frac{\delta z}{\delta\sigma}\right]_{x_0}=0.$$

Or, ces facteurs ont des valeurs finies et déterminées, car ils représentent les cosinus des angles que la courbe AB fait avec les courbes AA', BB' auxquelles elle doit être limitée. D'ailleurs on conclut de ces deux relations que la courbe AB est normale aux deux courbes AA', BB', puisque les cosinus des angles qu'elle fait avec leurs tangentes en B et en A sont nuls.

Proposons nous maintenant de déterminer quelle est la ligne la plus courte entre deux points de l'espace.

En désignant par x_0 et x_1 les abscisses de ces deux points l'intégrale définie qui devra être un minimum sera :

$$\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+p^2+p'^2}.$$

Dans ce cas l'équation indéfinie se réduit à :

$\omega\frac{dP}{dx}+\omega'\frac{dP'}{dx}=0$; ce qui donne nécessairement : $\frac{dP}{dx}=0$, $\frac{dP'}{dx}=0$ d'où en remarquant que $P=\frac{p}{\sqrt{1+p^2+p'^2}}$ et

$P' = \frac{p'}{\sqrt{1+p^2+p'^2}}$, $p = C$, $p' = C'$. En intégrant ces deux relations on a : $\begin{cases} y = Cx + \alpha \\ z = C'x + \beta \end{cases}$ qui indique que la courbe cherchée est une ligne droite.

D'ailleurs cette droite sera normale aux courbes ou aux surfaces auxquelles elle devra être limitée car l'intégrale donnée rentre dans la forme générale examinée précédemment.

Cherchons maintenant quelle est la ligne la plus courte entre deux points donnés sur une surface dont l'équation est $F(x, y, z) = 0$.

Dans ce cas, l'équation indéfinie se réduit encore à $\omega \frac{dP}{dx} + \omega' \frac{dP'}{dx} = 0$; mais alors ω et ω' ne sont plus indépendants l'un de l'autre; ils sont nécessairement liés l'un à l'autre par la relation $F(x, y+\omega, z+\omega') = 0$.
On en tirera en variant : $\frac{dF}{dy}\omega + \frac{dF}{dz}\omega' = 0$. d'où

$\omega' = -\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}\,\omega$ et en substituant dans l'équation indéfinie

il viendra $\omega\left[\frac{dP}{dx} - \frac{dP'}{dx}\cdot\frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}}\right] = 0$. Comme d'ailleurs

ω est arbitraire il en résultera :

(1) $\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dF}{dz} - \frac{dP'}{dx}\cdot\frac{dF}{dy} = 0$. Cette dernière équation différentielle étant intégrée donnerait une relation $F_1(x, y, z) = 0$

qui jointes à $F(x,y,z)=0$ fourniraient les deux équations de la courbe cherchée.

Toutefois on peut sans connaître la nature de cette courbe constater sa propriété caractéristique. Elle jouit de la propriété d'avoir tous ses plans osculateurs normaux à la surface sur laquelle elle est tracée.

En effet, l'intégrale définie qui doit être un minimum étant évidemment la même que dans le problème précédent.

On aura encore, $P=\dfrac{p\,dx}{dx\sqrt{1+p^2+p'^2}}=\dfrac{dy}{ds}$ de même

$P'=\dfrac{p'\,dx}{dx\sqrt{1+p^2+p'^2}}=\dfrac{dz}{ds}$. Ces valeurs portées dans (1)

donneraient : $\dfrac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)dy}{\frac{dF}{dy}\cdot dy}=\dfrac{d\left(\frac{dF}{ds}\right)dz}{\frac{dF}{dz}\cdot dz}$ or on peut facilement conclure de cette dernière relation $\dfrac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{dF}{dy}}=\dfrac{d\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\frac{dF}{dz}}$.

En effet, on aura évidemment :

$$\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{dF}{dy}}=\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)dy+d\left(\frac{dz}{ds}\right)dz}{\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz}\quad(2).$$

Or, si l'on remarque que $\dfrac{dx}{ds}$, $\dfrac{dy}{ds}$, $\dfrac{dz}{ds}$ représentent les cosinus des angles que fait la tangente avec les axes des coordonnées, on aura : $\left(\dfrac{dx}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{dz}{ds}\right)^2=1$,

ou en différentiant :

$$\frac{dx}{ds}d.\left(\frac{dx}{ds}\right)+\frac{dy}{ds}d\left(\frac{dy}{ds}\right)+\frac{dz}{ds}d\left(\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

On aura de même en différentiant $F(x,y,z)=0$

$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=0$. On tire de ces deux relations :

$$d\left(\frac{dy}{ds}\right)dy+d\left(\frac{dz}{ds}\right)dz=-d\left(\frac{dz}{ds}\right)dx \text{ et}$$

$$\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dz}dz=-\frac{dF}{dx}dx.$$

et en substituant dans (2) il viendra :

$$\frac{d\left(\frac{dy}{ds}\right)}{\frac{dF}{dy}}=\frac{d.\left(\frac{dx}{ds}\right)}{\frac{dF}{dx}}=\frac{d.\left(\frac{dz}{ds}\right)}{\frac{dF}{dz}}=K$$

Si l'on pose chacun de ces rapports égal à K.
Or, si l'on se rappelle que les cosinus des angles que fait le rayon du cercle osculateur avec les axes sont proportionnels à $d\left(\frac{dx}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dy}{ds}\right)$, $d\left(\frac{dz}{ds}\right)$ et ceux des angles que la normale à la surface fait avec les mêmes droites proportionnels à $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ et $\frac{dF}{dz}$ on aura en désignant par λ, μ, ν : a, b, c les angles

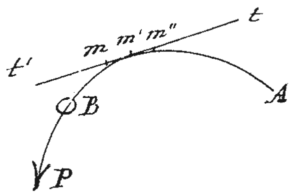
$\cos.\lambda = K\cos.a$ En faisant la somme des carrés
$\cos.\mu = K\cos.b$ de ces relations, on en tirera $K=1$ et
$\cos.\nu = K\cos.c$ et par conséquent :
$\cos.\lambda=\cos a, \cos.\mu=\cos.b, \cos.\nu=\cos.c.$

Il en résulte évidemment que le plan osculateur

est normal à la surface.

On peut démontrer cette propriété par des considérations géométriques.

En effet, soient A et B les deux points donnés sur la surface. fixons au point A un fil inextensible et faisons passer par ce même fil un anneau placé en B ; si l'on applique une force P à ce fil, il prendra évidemment dans la position d'équilibre la forme de la ligne la plus courte entre le point A et le point B sur la surface.



Cela posé, si l'on considère deux éléments consécutifs mm' et $m'm''$ de la figure ainsi déterminée, les tensions dirigées suivant ces éléments auront une résultante située dans leur plan, c'est-à-dire, dans le plan osculateur de la courbe ; d'ailleurs si l'on suppose que la corde n'éprouve pas de frottement sur la surface, cette résultante devra être tenue en équilibre par la résistance de la surface qui est dirigée suivant la normale ; il faudra donc que cette normale soit située dans le plan osculateur.

<u>Brachystochrône</u>. Dans ce cas, on a comme nous l'avons vu, au commencement du calcul des variations à chercher le minimum de l'intégrale définie.

$$T = \int_{x_0}^{x_1} \frac{ds}{v} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{1+p^2+p'^2}}{\sqrt{x-x_0}}.$$

L'équation indéfinie se réduira encore à $\omega \dfrac{dP}{dx} + \omega' \dfrac{dP'}{dx} = 0$,

et alors on en conclura $P=C$, $P'=C'$ comme précédemment. Si même on remarque que l'on a $P=\frac{p}{\sqrt{x-x_0}\cdot\sqrt{1+p^2+p'^2}}$ et $P'=\frac{p'}{\sqrt{x-x_0}\cdot\sqrt{1+p^2+p'^2}}$ on en conclura $\frac{P}{P'}=\frac{p}{p'}=$ une constante α ou comme $p=\frac{dy}{dx}$ et $p'=\frac{dz}{dx}$ on en tirera :

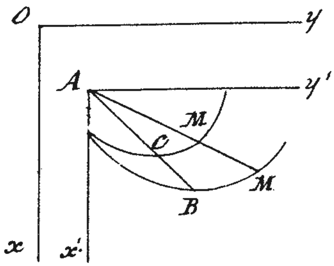
$$\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dz}{dx}}=\frac{dy}{dz}=\alpha$$ en intégrant il viendra :

$y=\alpha z+\beta$, ce qui montre que la courbe cherchée doit être toute entière dans le plan vertical.

Il en résulte que pour trouver sa nature nous pourrons supposer les limites trouvées et opérer précisement dans ce plan.

L'équation $P=C$ deviendra alors : $\frac{p}{\sqrt{x-x_0}\cdot\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{\sqrt{C}}$

(en mettant la constante sous la forme $\frac{1}{\sqrt{C}}$). Elevant au



carré et chassant les dénominateurs il vient : $Cp^2=(x-x_0)(1+p^2)$. On voit déjà que pour $x=x_0$, $p=0$ par conséquent la tangente au point de départ est verticale. D'ailleurs en résolvant cette relation par rapport à p ou $\frac{dy}{dx}$ on trouve

$\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{x-x_0}{C-(x-x_0)}}$ qui représente l'équation différentielle

d'une cycloïde à base horizontale et qui a son sommet au point A. Lorsque les deux limites sont fixes, il est très facile de construire cette cycloïde. En effet avec un cercle générateur de rayon quelconque traçons une cycloïde A CM ; cette cycloïde ayant même origine sera semblable à la courbe cherchée et si l'on joint ACB le rapport des deux rayons vecteurs quelconque sera constant et égal à $\frac{AB}{AC}$ de telle sorte que connaissant la courbe A CM : la courbe ABM s'en déduira nécessairement.

Calculons enfin la valeur numérique de ce temps minimum que le mobile a mis à descendre du point A au point B.

Or, on a trouvé $p = \frac{\sqrt{x-x_0}}{\sqrt{C-(x-x_0)}}$ on en tirera :

$\sqrt{1+p^2} = \sqrt{\frac{C}{C-(x-x_0)}}$ et par suite

$T = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{\sqrt{C}\, dx}{\sqrt{x-x_0}\cdot\sqrt{C-(x-x_0)}}$; pour l'intégrer nous poserons :

$\sqrt{x-x_0} = u$ alors il viendra :

$T = \frac{2\sqrt{C}}{\sqrt{2g}} \int_{x_0}^{x_1} \frac{d\frac{u}{\sqrt{C}}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{C}}}$ et en intégrant et supposant que le temps est compté à partir du moment du départ

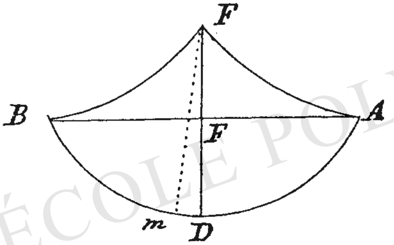
$$T = \frac{2\sqrt{C}}{\sqrt{2g}} \operatorname{arc\,sin}.\frac{u}{\sqrt{C}} = \frac{2\sqrt{C}}{\sqrt{2g}} \operatorname{arc\,sin}.\left(\sqrt{\frac{x_1-x_0}{C}}\right)$$

Maintenant si l'on suppose que le point le plus bas de la courbe est le point d'arrivée on aura :

$$T=\frac{\pi\sqrt{C}}{\sqrt{2g}}.$$

Cette expression $T=\frac{\pi\sqrt{C}}{\sqrt{2g}}$ comparé à $t=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{y}}$ qui donne la durée d'une demi oscillation du pendule, montre que pour qu'un pendule effectue sa demi oscillation dans le même temps il faut que l'on ait $l=2C$ (cette relation se conclut immédiatement en égalant les deux expressions de T et t).

Or, on a vu en mécanique lorsqu'on s'est occupé du mouvement d'un point matériel pesant sur la cycloïde



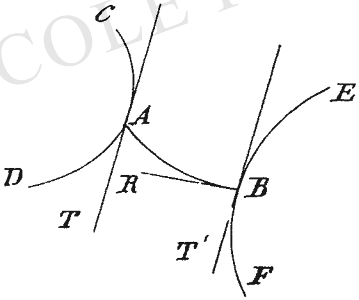
que la cycloïde BDA était la développée de la courbe BFA et que d'ailleurs $EF=ED=C$. Il résulte alors de ce que nous venons d'établir que si l'on imagine un pendule de longueur $FD=2C$ il décrira sa demie oscillation mD sur le dernier élément de la courbe dans le même temps que le point matériel mettra à descendre du point B au point D. Ce résultat pourrait être prévu à priori car on sait que la cycloïde est une courbe tautochrône.

Reprenons maintenant l'équation aux limites et pour celà revenons aux coordonnées dans l'espace.

Nous savons que dans ce cas on a : $V=\frac{\sqrt{1+p^2+p'^2}}{\sqrt{x-x_0}}$.

Puisque V ne contient que x_0, ψ_0 seul sera modifié et nous

pourrons appliquer les raisonnements faits précédemment à ψ_1 ; on en conclura que la cycloïde sera normale à sa courbe limite au point d'arrivée B.



Il restera alors

$$-\psi_0 + \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_0}\, dx = 0$$

ou

$$-V_0\, \delta x_0 - \omega_0 P_0 - \omega_0' P_0' + \delta x_0 \int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_0}\, dx = 0 \quad (1)$$

Remarquons que V_0 étant égal à ∞ il nous faut préalablement transformer cette expression ; or, d'après la formule même de V on a $\frac{dV}{dx_0} = -\frac{dV}{dx}$ et puisque

$dV = P\,dp + P'\,dp' + \frac{dV}{dx}dx$ il viendra :

$$\int_{x_0}^{x_1} \frac{dV}{dx_0}\, dx = \int_{x_0}^{x_1} (P\,dp + P'\,dp' - dV) = P(p_1 - p_0) + P'(p'_1 - p'_0) - V_1 + V_0$$

car on a vu que P et P' étaient constants.

Substituant dans (1), et remplaçant ω_0 et ω_0' par leurs valeurs il viendra :

$$-V_0\,\delta x_0 - (\delta y_0 - p\,\delta x_0)P_0 - (\delta z_0 - p_0'\,\delta x_0)P_0' + \delta x_0 \left[P(p_1 - p_0) + P'(p_1' - p_0') - V_1 + V_0\right] = 0.$$

ou en réduisant :

$$-P_0\,\delta y_0 - P_0'\,\delta z_0 + P p_1\,\delta x_0 + P' p_1\,\delta x_0 - V_1\,\delta x_0 = 0$$

On peut d'ailleurs la mettre sous la forme :

$$-P_1\,\delta y_0 - P'_1\,\delta z_0 + \left(P_1 p_1 + P'_1 p'_1 - V_1\right)\delta x_0 = 0$$

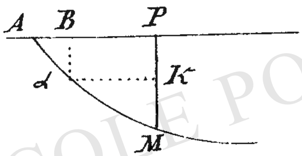
puisque $P_0 = P_1$ et $P'_0 = P'_1$. Si maintenant on remplace V_1, P_1, P'_1 par leurs valeurs

$$\frac{\sqrt{1+p_1^2+p_1'^2}}{\sqrt{x_1-x_0}},\ \frac{p_1}{\sqrt{x_1-x_0}\,\sqrt{1+p_1^2+p_1'^2}},\ \frac{p_1}{\sqrt{x_1-x_0}\,\sqrt{1+p_1^2+p_1'^2}}$$

et que l'on réduise on aura enfin :

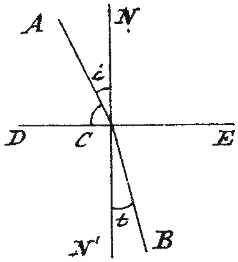
$\delta x_0 + p_1\,\delta y_0 + p'_1\,\delta z_0 = 0$. Relation qui exprime que la tangente BR à la courbe AB au point B est perpendiculaire à la tangente à la courbe CD au point A.

Au lieu de développer on aurait pu éluder la difficulté en comptant les ordonnées à partir d'un point situé un peu au dessous d'une quantité $B\alpha = \alpha$ du point A où la vitesse est nulle ; on aurait fait les mêmes calculs et à la fin on aurait supposé $\alpha = 0$.



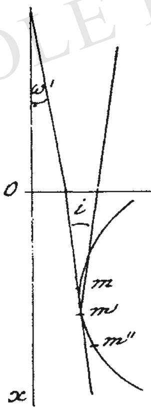
<u>Solution</u> <u>de</u> <u>Bernouilli</u>. On sait que lorsqu'un rayon de lumière passe d'un milieu dans un autre séparé du premier par un plan, il existe entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r la relation :

$$\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin r}{v'}$$ (v et v' exprimant les vitesses dans chacun de ces milieux) et l'on admet que pour aller du point A au point B il met le temps le plus court.



Cela posé, il considéra le corps pendant son trajet sur deux éléments consécutifs ;

puisqu'il doit les parcourir dans le temps le plus court, il admettait qu'on avait la même relation que dans le cas précédent ce qui donnait $\frac{\sin i}{v} = \frac{\sin i + d \sin . i}{v + dv}$.



On en tire $dv \sin . i = v d(\sin . i)$ il en resulte $v d(\sin i) - \sin i \, dv = 0$ et par suite : $d\left(\frac{\sin . i}{v}\right) = 0$ en intégrant $\frac{\sin i}{v} = \frac{1}{\sqrt{C}}$. Cette équation peut d'ailleurs se ramener à l'equation différentielle que nous avons déterminée directement car on a alors $\sin i = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}}$ et $v = \sqrt{2g(x - x_0)}$ en substituant on a $\frac{p}{\sqrt{2g(x-x_0)}\sqrt{1+p^2}} = \frac{1}{\sqrt{C}}$ relation que l'on avait déjà trouvée.

On peut se proposer maintenant de déterminer la forme de la fonction de x qui rend non seulement une certaine intégrale définie maximum ou minimum mais encore qui est telle qu'une autre intégrale définie conserve une valeur constante. Ces maxima ou minima sont appelés <u>maxima ou minima relatifs</u>.

C'est ce qui arriverait si l'on se proposait de déterminer parmi toutes les courbes isopérimètres celle qui dans sa révolution autour d'un axe, engendrerait la surface minimum.

Alors, il faudra que l'on ait $\int_{x_0}^{x_1} ds = V$ en même temps

que $2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\,ds$ devra être un minimum.

Si l'on se propose généralement de rendre un minimum ou un maximum une intégrale définie $\int_{x_0}^{x_1} V dx$ en même temps que l'on a : $\int_{x_0}^{x_1} U dx = l$, il faudra évidemment que les variations de chacune de ces expressions soient simultanément nulles ce qui donnera deux relations de la forme :

$$\psi_1 - \psi_0 + \int_{x_0}^{x_1} \omega v\,dx = 0 \quad (1)$$

$$\pi_1 - \pi_0 + \int_{x_0}^{x_1} \omega u\,dx = 0 \quad (2).$$

Alors ω ne sera plus arbitraire comme on pouvait le prévoir car on ne doit considérer parmi les courbes qui satisfont à (1) que celles qui ont une longueur donnée.

Pour éliminer ω entre (1) et (2) on posera

$\int_{x_0}^{x_1} \omega u\,dx = \varphi(x)$ il en résultera :

$\omega u\,dx = d\varphi(x)$ d'où : $\omega = \frac{1}{u} \cdot \frac{d\varphi(x)}{dx}$ en reportant dans

(1) il viendra : $\psi_1 - \psi_0 + \int_{x_0}^{x_1} \frac{V}{u} \frac{d\varphi}{dx} dx = 0$, ou en développant l'intégrale par l'intégration par parties

$$(3)\quad \psi_1 - \psi_0 + \left(\varphi \cdot \frac{v}{u}\right)_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} \varphi(x)\, d\left(\frac{v}{u}\right) = 0.$$

Ici il faut remarquer que $\varphi(x)$ est une fonction qui n'est assujettie à certaines conditions qu'aux limites et qui est arbitraire entre ces limites car on a.

$\int_{x_0}^{x_1} \omega u\,dx = \varphi(x_1) - \varphi(x_0)$ et l'on doit satisfaire à la

condition $\pi_1 - \pi_0 + \varphi(x_1) - \varphi(x_0) = 0$; alors on peut faire sur (3) les mêmes raisonnements que dans le cas des maxima absolus ce qui exigera : $d\left(\frac{v}{u}\right) = 0$ d'où $v + au = 0$ (4), d'ailleurs il en résulte :

$$\left[\varphi(x)\frac{v}{u}\right]_{x_0}^{x_1} = -a\left(\varphi(x_0) - \varphi(x_1)\right) = a\left(\pi_1 - \pi_0\right).$$

On devra donc avoir encore : $\psi_1 - \psi_0 + a(\pi_1 - \pi_0) = 0$ (5).

On a introduit une nouvelle constante a ; mais elle servira à assujettir la courbe déterminée de nature à avoir une longueur donnée.

On remarquera que les relations (4) et (5) sont les mêmes que celles que l'on aurait obtenues en cherchant les conditions de maximum absolu de $\int_{x_0}^{x_1}(V + aU)\,dx$.

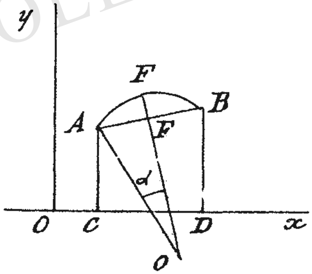
On peut même vérifier a priori que si $\int_{x_0}^{x_1}(V+U)\,dx$ est un maximum absolu et qu'en même temps $\int_{x_0}^{x_1} aU\,dx$ soit assujetti à avoir une valeur constante, $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$ sera un maximum.

En effet, si l'on compare à une intégrale voisine on devra avoir : $\int_{x_0}^{x_1}(V + aU)\,dx > \int_{x_0}^{x_1}(V' + aU')\,dx$ et comme $\int_{x_0}^{x_1} aU\,dx = \int_{x_0}^{x_1} aU'\,dx$, il en résultera : $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx > \int_{x_0}^{x_1} V'\,dx$.

On remarquera enfin que si l'on s'était proposé la question inverse, c'est-à-dire, si l'on s'était proposé de rendre $\int_{x_0}^{x_1} U\,dx$ un maximum ou un minimum et $\int_{x_0}^{x_1} V\,dx$

on aurait trouvé une courbe de même nature; la constante seule changera.

Exemple. Trouver parmi les courbes de longueur donnée celle qui comprend l'aire maximum.



L'intégrale $\int_{x_0}^{x_1} y\,dx$ devra être un maximum en même temps que $\int_{x_0}^{x_1} dx\sqrt{1+p^2}=2l$; d'après ce que nous avons vu il faudra chercher le maximum absolu de $\int_{x_0}^{x_1}\left(y+a\sqrt{1+p^2}\right)dx$; on a $M=0$ il en résulte $V=Pp+C$, c'est-à-dire; $y+a\sqrt{1+p^2}=\dfrac{ap^2}{\sqrt{1+p^2}}+C$, ou en réduisant: $y-C=-\dfrac{a}{\sqrt{1+p^2}}$ on en tire:

$$p^2=\frac{a^2-(y-C)^2}{(y-C)^2} \text{ d'où } \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{a^2-(y-C)^2}}{y-C}$$

et $dx=\dfrac{(y-c)\,dy}{\sqrt{a^2-(y-c)^2}}$. En intégrant il vient:

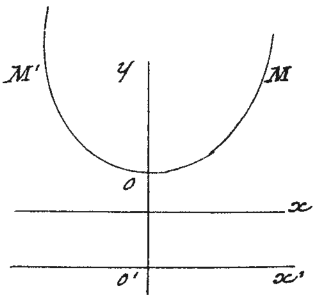
$x-c'=-\sqrt{a^2-(y-c)^2}$ et enfin:

$(x-c')^2+(y-c)^2=a^2$ qui est l'équation d'un cercle.

Son centre sera en un point O situé sur la perpendiculaire FE et pour déterminer le rayon et par suite la constante a, on aura en désignant l'angle FOA par α et par C la demi corde $AE=C=a\sin\alpha$, $l=a\alpha$; en éliminant α entre ces deux relations on aura une équation transcendante qui donnera a:

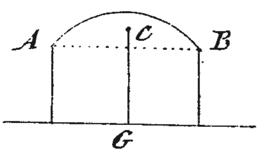
Problème. Trouver parmi les courbes isopérimètres celle qui engendre une surface de révolution minimum.

Dans ce cas on doit avoir : $\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+p^2}\,dx = l$ et



$2\pi \int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p^2}\,dx$ devra être un minimum ; alors il faudra chercher le minimum absolu de $\int_{x_0}^{x_1} (y+a)\sqrt{1+p^2}\,dx$; or si l'on prend pour nouvel axe des x la ligne $O'x'$ située à une distance $OO' = a$, il suffira de changer $y+a$ en y et l'on aura à chercher le minimum de $\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p^2}\,dx$; cette question a déjà été résolue et l'on a trouvé une chaînette qui a pour axe principal ce nouvel axe des x.

Des considérations géométriques pouvant aussi faire voir à priori que la courbe doit être une chaînette. En effet, l'aire engendrée par la courbe AB supposée répondant à la ques-



tion est égale à $2\pi y_1 l$. (y_1 étant l'ordonnée du centre de gravité de cette courbe), puisque l est constant par hypothèse, le maximum ou le minimum répondra au maximum ou au minimum de y. Or, on verra en mécanique que lorsqu'un système pesant est en équilibre, il jouit de la propriété d'avoir son centre de gravité à une hauteur minimum dans le cas de l'équilibre stable et maximum dans le cas de l'équilibre instable. Il en résulte que le maximum ou le minimum sont donné par la courbe

d'équilibre qui est comme on sait la chaînette.

Problème. Chercher la surface de révolution qui sous une aire donnée renferme le plus grand volume possible.

Il faut que $\pi\int_{x_0}^{x_1} y^2 dx$ soit un maximum en même temps que l'on doit avoir : $2\pi\int_{x_0}^{x_1} y\sqrt{1+p^2}\,dx = 2A$.

Il faudra encore chercher le maximum absolu de $\int_{x_0}^{x_1}(y^2+2ay\sqrt{1+p^2}\,dx$. On aura : $M=0$, d'où $V=Pp+C$ et en remplaçant V et P par leurs valeurs dans ce cas particulier, il viendra.

$$y^2+2ay\sqrt{1+p^2}=\frac{2ayp^2}{\sqrt{1+p^2}}+C.$$

En réduisant et ordonnant il vient :

$$y^2+\frac{2ay}{\sqrt{1+p^2}}=\pm b^2$$ (en mettant la constante sous la forme $\pm b^2$ pour l'homogénéité).

Résolvant par rapport à p^2 on aura :

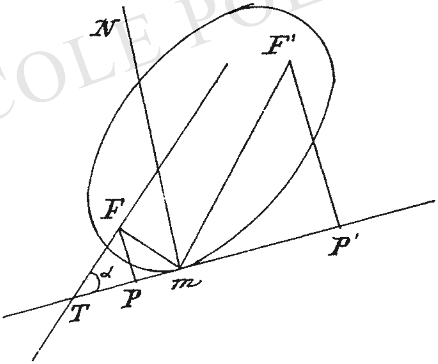
$$p^2=\frac{4a^2y^2}{y^2\pm b^2}-1.$$

$$\text{d'où } p=\frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{4a^2y^2-(y^2\mp b^2)^2}}{y^2\mp b^2},$$

expression que nous ne savons pas intégrer.

Mr Delaunay en a constaté la propriété géométrique en faisant voir qu'elle était engendrée par le foyer d'une section conique qui roule sur sa tangente.

En effet, en désignant Fm et $F'm$ par r_1 et r_2, FP et $F'P'$ par y_1 et y_2 on aura les relations :



$y_1 = r_1 \cos.\alpha$
$y_2 = r_2 \cos.\alpha$ il en résultera

$y_1 + y_2 = (r_1 + r_2)\cos\alpha = 2a\cos.\alpha$.
(en désignant par $2a$ le grand axe de l'ellipse).
D'ailleurs si $\underline{2b}$ est le petit axe on aura $y_1 y_2 = b^2$.
Maintenant on sait que Fm sera la normale à la courbe engendrée par le roulement; FT qui est perpendiculaire à cette droite sera la tangente et l'on aura $\cos.\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1+p^2}}$. Alors il est évident que les valeurs y_1, y_2 satisferont à l'équation du second degré

$y^2 - \dfrac{2ay}{\sqrt{1+p^2}} + b^2 = 0$ qui est l'équation différentielle trouvée précédemment.

Dans le cas de l'hyperbole il suffit de changer le signe de b^2.

Pour passer du cas précédent au cas de la parabole, il faut supposer que a devient infini en même temps que $\dfrac{b^2}{2a}$ conserve une valeur finie; alors en divisant l'équation finale par $2a$ et introduisant ces hypothèses il viendra $-\dfrac{y}{\sqrt{1+p^2}} = C^2$ (C^2 représentant les valeurs de $\dfrac{b^2}{2a}$) ce qui est l'équation différentielle d'une chaînette.

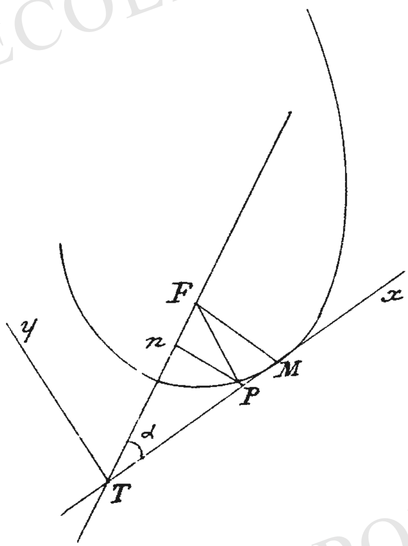
Seulement il faut remarquer que ce cas ne répond pas

à la question ; car dans l'intégrale $\int_{x_0}^{x_1}(y^2+ay\sqrt{1+p^2})dx$ on peut mettre a sous la forme $\frac{1}{a'}$ de sorte que le maximum donne une courbe de même nature pour : $\int_{x_0}^{x_1}(a'y^2+y\sqrt{1+p^2})dx$ et supposer $a=\infty$ revient à supposer $a'=0$, il en résulte qu'il reste à chercher le maximum de $\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+p^2}\,dx$ qui nous fera retomber sur la même solution.

D'ailleurs en s'appuyant sur une propriété simétrique de la parabole on peut établir simplement cette équation.

Car si FT est une perpendiculaire au rayon vecteur MF et PP' perpendiculaire à MT, la droite Pn sera de longueur constante. On aura donc dans le triangle nFP $Pn=FP\cos.\alpha=a$ ou $y\cos.\alpha=a$ d'ailleurs on a évidemment :

$tg.\alpha=p$. d'où $\frac{y}{\sqrt{1+p^2}}=a$.



Calcul des différences finies.

Le but général qu'on se propose dans le calcul différentiel, est de chercher la limite des accroissements simultanés de deux variables qui dépendent l'une de l'autre, sans considérer les valeurs numériques des accroissements.

Au contraire, dans le calcul des différences finies, on s'occupe de ces valeurs numériques, et on cherche à en découvrir la loi.

Cette loi se manifeste de suite dans l'exemple suivant. Prenons la suite formée par les carrés des nombres naturels : soit,

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 &ca.

retranchons de chacun de ces nombres celui qui le précède ; il viendra :

3, 5, 7, 9, 11, 13 &ca.

Opérant de même sur cette série : on a :

2, 2, 2, 2, &ca.

les différences suivantes seraient nulles.

Opérant de même sur les cubes des nombres naturels, on formera un tableau analogue, et on verra bientôt apparaître la différence constante 6.

On voit aisément, que la connaissance des nombres 1, 3, 2 qui forment les têtes des colonnes, entraine celle des nombres qui composent ces mêmes colonnes. En effet, pour obtenir 5 il suffira d'ajouter 3 à 2 puis 3 à 2 plus 2 ou à 2.2, pour avoir 7, et ainsi de suite pour cette colonne.

Passons à la première colonne, dont le premier nombre est 1, on obtiendra le suivant en ajoutant 3 à 1,

ce qui donnera 4. Pour obtenir 9 nous écrirons $1+2.3+2$; pour obtenir 16, $1+3.3+3.2$, de telle sorte que la formation des nombres de cette colonne ne dépend que de la connaissance des trois nombres 1, 3, 2. Cette loi est manifeste, de telle sorte que a, b, c étant trois nombres désignés comme tête de colonne on aura immédiatement les résultats suivants :

$$\begin{array}{lll} a, & b & \\ a+b & b+c & c \\ a+2b+c & b+2c & c \\ a+3b+2c & b+3c, & c \\ \vdots & \vdots & \end{array}$$

Cela posé, soit $u_0, u_1, u_2, \ldots u_n \ldots$ une suite de nombres donnés, ou provenant des valeurs que prend une quantité variable.

Si on retranche chacune de ces valeurs de la suivante, on aura leurs différences premières, que l'on désigne par

$$\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \ldots \ldots \Delta u_n \ldots \ldots$$

En retranchant de même chacune de ces différences premières de celle qui la suit, on aura les différences secondes, représentées par :

$$\Delta^2 u_0, \Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \ldots \ldots \Delta^2 u_n \ldots \ldots$$

On forme de même les différences troisièmes, quatrièmes &a.

Etablissons d'abord quelques règles analogues à celles que l'on a établies dans le calcul différentiel.

1° on a $\Delta(u \pm v) = \Delta u \pm \Delta v$

En effet soit $u_1 \pm v_1$ l'état de la question $u \pm V$, qui vient ayant la valeur $(u \pm V)$, pour définition

$$\Delta(u \pm V) = (u_1 \pm V_1) - (u \pm V)$$

$$\text{ou } \Delta(u \pm V) = (u_1 - u) \pm (V_1 - V)$$

ce qu'il fallait établir.

On voit de même que si a est une constante:

$$\Delta(u + a) = \Delta u$$

de même $\Delta(Cu) = C\Delta u$.

C étant une constante.

Si on avait le produit uv, on trouverait de même que:

$$\Delta(uv) = v\Delta u + u\Delta V + \Delta u \Delta v.$$

Cela posé, nous allons calculer u_n en fonction des fonctions des quantités $u_0, \Delta u_0, \ldots \Delta^n u_0$.

On a successivement

$$u_1 = u_0 + \Delta u_0$$

$$u_2 = u_1 + \Delta u_1 = u_1 + \Delta(u_0 + \Delta u_0)$$

$$\text{ou } u_2 = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0,$$

on aura de même

$$u_3 = u_2 + \Delta u_2 = u_0 + 3\Delta u_0 + 3\Delta^2 u_0 + \Delta^3 u_0.$$

En continuant de la sorte et examinant ces valeurs de $u_1, u_2, u_3 \ldots$ &a ..

On voit que les coefficients ne sont autre chose que ceux du développement de la 1ère, 2ème, 3ème puissance du binôme, lesquels coefficients sont successivement multipliés par

$\Delta^1 u_0, \Delta^2 u_0, \Delta^3 u_0$. L'analogie conduirait à l'expression:

$$u_n = u + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 u_0 + \cdots + \Delta^n u_0,$$

Expression représentée symboliquement par
$u_n = (1+\Delta)^n u$, formule dans laquelle il faudra, après avoir développé, remplacer les exposants par des indices.

On peut le démontrer, en prouvant que si la formule ainsi établie est vraie pour l'ordre n, qu'elle l'est encore pour l'ordre $n+1$.

Supposons, en effet, que $A, B, C, \ldots$ étant les coefficients du développement du binôme pour la puissance n, on ait :

$$u_n = u + A\Delta u + B\Delta^2 u + C\Delta^3 u + \ldots\ldots + \Delta^n u.$$

Comme $u_{n+1} = u_n + \Delta u_n$

il vient :

$$u_{n+1} = u \begin{array}{l} +A \\ +1 \end{array} \Bigg| \Delta u \begin{array}{l} +B \\ +A \end{array} \Bigg| \Delta^2 u \begin{array}{l} +C \\ +B \end{array} \Bigg| \Delta^3 u \ldots\ldots\ldots\ldots + \Delta^{n+1} u.$$

Les coefficients de ce développement, étant comme on le sait ceux de la puissance $(n+1)^{ième}$ du binôme, on en conclut la proposition énoncée.

Réciproquement, On peut calculer toutes les différences, jusqu'à celle de l'ordre n au moyen des $n+1$ premiers nombres $u_0, u_1 \ldots\ldots u_n$

En effet on a :

$$\Delta u_0 = u_1 - u_0$$

$$\Delta^2 u_0 = \Delta u_1 - \Delta u_0 = u_2 - u_1 - (u_1 - u_0) = u_2 - u_1 + u_0$$

$$\Delta^3 u_0 = \Delta u_2 - 2\Delta u_1 + \Delta u_0 = u_3 - 3u_2 + 3u_1 - u_0$$

De même

$$\Delta^4 u_0 = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u_0.$$

L'analogie conduit à la formule :

$$\Delta^n u_0 = u_n - \frac{n}{1} M_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} N_{n-2} \ldots\ldots (-I)^n u_0.$$

Car on a déjà pu remarquer une loi, dans les quantités

Δu_0, $\Delta^2 u_0$, $\Delta^3 u_0$ ... on voit que les indices dans les seconds membres vont en diminuant d'une unité jusqu'à u_0. Quant aux coefficients ce sont ceux du développement du binôme $(u-1)$. Il résulte de là que si cette loi est générale on aurait $\Delta^n u$, en faisant le développement de $(u-1)^n$ et changeant dans le résultat tous les exposants en indices. Pour le démontrer admettons la loi pour l'indice n et prouvons qu'elle subsiste encore pour $n+1$.

Soit donc $A, B, \ldots$ les coefficients de la puissance n du binôme, on a comme on le suppose :

$$\Delta^n u = u_n - A u_{n-1} + B u_{n-2} - C u_{n-3} + \cdots\cdots$$

par suite :

$$\Delta^{n+1} u = u_{n+1} \begin{array}{c|}-A \\ -1\end{array}\; u_n \begin{array}{c|}+B \\ +A\end{array}\; u_{n-2} \begin{array}{c|}-C \\ -B\end{array}\; u_{n-3} + \cdots\cdots$$

Or, il est facile de voir que

$-(A+1)$, $+(B+A)$, $-(C+B)$ &a sont les coefficients de la puissance $(n+1)^{ème}$, $A, B, C, \ldots$ étant ceux de la puissance n. Donc la formule est générale.

On la représente symboliquement par :

$$\Delta^n u = (u-1)^n$$

et dans le développement de $(u-1)^n$ on remplace les exposants par des indices, et le dernier terme u^0 par u_0.

On peut au moyen de la formule symbolique $u_n = (1+\Delta)^n u_0$ démontrer la série de Taylor : car si l'on pose $u_0 = f(x)$ $\Delta x = h$, on aura :

$$f(x+nh) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 f(x) + \text{etc} \ldots$$

puis en posant encore $nh = i$

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1}\frac{\Delta f(x)}{h} + \frac{i(i-h)}{1.2}\frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} + \text{etc} \ldots\ldots$$

fesons maintenant croître n indéfiniment, il en résultera que h diminuera indéfiniment et en même temps

$$\frac{\Delta f(x)}{h},\ \frac{\Delta^2 f(x)}{h^2} \text{ etc. deviendront } f'(x),\ f''(x) \text{ etc.}$$

et on aura :

$$f(x+i) = f(x) + \frac{i}{1} f'(x) + \frac{i^2}{1.2} f''(x) + \text{etc.}$$

Nous revenons ainsi à la série de Taylor ; mais il faut remarquer que cette démonstration est incomplète, car on ne voit pas bien que l'on puisse regarder le facteur général $i\left(\overline{n-1}\right)h$ comme égal à i lorsque h diminuant indéfiniment, n augmente indéfiniment ; il faudrait ensuite s'assurer de la convergence de cette série, et enfin vérifier que le second membre représente bien le premier.

Nous avons voulu seulement montrer dans ce procédé la liaison de la théorie des différences finies et du calcul différentiel.

Cherchons les différences successives d'une fonction u de la forme : $Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \ldots\ldots$ on aura :

$$\Delta u = A\left((x+h)^m - x^m\right) + B\left((x+h)^{m-1} - x^{m-1}\right) + \ldots\ldots$$

$$= Amh \, x^{m-1} + \left| \begin{array}{l} \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 A \\ + \frac{m-1}{1} h\ B \end{array} \right| x^{m-2} + \text{etc.}$$

Ce résultat montre que la différence d'un polynôme algébrique est un polynôme algébrique de même forme d'un degré inférieur d'une unité et son premier terme ne dépend que du premier terme considéré.

Il en résulte que le $\Delta^2 u$ sera un polynôme du degré $m-2$ dont le premier terme sera $Am(m-1)h^2x^{m-2}$.

En continuant de la même manière on voit que $\Delta^m u$ sera une quantité constante puisque ce sera un polynôme en x du degré $m-m=0$ et que d'ailleurs on aura ;
$\Delta^m u = A m(m-1)(m-2)\ldots 3.2.1\, h^m$.
Toutes les différences suivantes seront nulles.

Examinons le cas particulier de $u = x^m$ on aura :

$$\Delta^n x^m = (x+nh)^m - \frac{n}{1}\left(x+\overline{n-1}\,h\right)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}\left(x+\overline{n-2}\,h\right) + \cdots (-1)^m x^m$$

et en posant $n = m$ on aura :

$$1.2.3\ldots m h^m = (x+mh)^m - \frac{m}{1}\left(x+\overline{m-1}\,h\right) + \frac{m(m-1)}{1.2}\left(x+\overline{m-2}\,h\right)^m + \cdots (-1)^m x^m$$

Au moyen de cette dernière relation on peut démontrer un théorème d'arithmétique, connu sous le nom de Théorème de Wilson.

Et d'abord rappelons le théorème suivant dû à Fermat. Si p est un nombre premier absolu et si a est premier avec p, $a^{p-1}-1$ sera divisible par p.

Le théorème est vrai pour $a = 1$; montrons que s'il a lieu pour un nombre quelconque a, il est vrai pour $a+1$. Et d'abord puisque p est premier avec a il suffit de prouver que $a^p - a$ est divisible par p ; on sera donc conduit à montrer que :
$(a+1)^p - (a+1)$ est divisible par p. En effet, on a :

$$(a+1)^p - (a+1) = a^p + \left(\frac{p}{1}a^{p-1} + \frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2} + \cdots\right) + 1 - a - 1$$

$$= a^p - a + \left(\frac{p}{1}a^{p-1}a + \frac{p(p-1)}{1.2}a^{p-2} + \cdots\right),$$ d'ailleurs tous les termes entre parenthèses sont évidemment divisibles par p, il en résulte donc que $(a+1)^p - (a+1)$ sera divisible par

p lorsque $a^p - a$ le sera.

Cela posé, on démontre facilement le théorème de Wilson dont l'énoncé est :

Si p est un nombre premier, le produit : $1.2.3\ldots(p-1)$ augmenté d'une unité sera un multiple de p.

Ce théorème offre quelque intérêt, parcequ'il caractérise les nombres premiers. En effet si p n'est pas premier, le produit $1.2,\ldots(p-1)$ sera divisible par p et par conséquent $1.2.3,\ldots(p-1)+1$ ne le sera pas.

Posons $h=1$, $m=p-1$, $x=1$ dans la formule établie précédemment, il viendra :

$$1.2.3,\ldots(p-1) = p^{p-1} - \frac{p-1}{1}(p-1)^{p-1} + \ldots\ldots + 1$$ (le dernier terme est positif car $p-1$ est nécessairement un nombre pair).

D'ailleurs d'après le théorème de Fermat on a $(p-1)^{p-1} - 1 = Kp$, il en résultera : $\frac{p-1}{1}(p-1)^{p-1} = (p-1)(Kp+1) = K'p - 1$.

On tirerait des expressions analogues pour les termes suivants de telle sorte qu'il viendra :

$$1.2.3\ldots(p-1) = Mp + \left(1 - \frac{p-1}{1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} - \ldots\right)$$

ou $$1.2.3\ldots(p-1)+1 = Mp + \left(1 - \frac{p-1}{1} + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2} + \ldots + 1\right)$$

et la parenthèse est évidemment nulle car elle est égale à $(1-1)^{p-1}$

<u>Differences successives de a^x</u>. On a :

$$\Delta(a^x) = a^{x+h} - a^x = a^x(a^h - 1)$$

$$\Delta^2(a^x) = \Delta a^x(a^h - 1) = a^x(a^h - 1)^2$$

et en général il est évident que :

$$\Delta^n(a^x) = a^x(a^h-1)^n.$$

Différence de sin. $(ax+b)$. On a :

$$\Delta \sin.(ax+b) = \sin.(ax+ah+b) - \sin.(ax+b)$$
$$= 2\sin.\frac{ah}{2}\cos.\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right).$$

Différence de cos. $(ax+b)$. On aura exactement de la même manière : $\Delta\cos.(ax+b) = -2\sin.\frac{ah}{2}\sin.\left(ax+b+\frac{ah}{2}\right)$.

On pourrait en déduire facilement les différences successives car pour les différences secondes on introduira : $\Delta\cos.(ax+b)$ et $\Delta\sin.(ax+b)$ et ainsi de suite.

Différences du produit : $x(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)$

On aura :

$$\Delta = (x+h)(x+2h)\ldots(x+nh) - x(x+h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)$$
$$= \overline{(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)}\,(x+nh-x) =$$
$$(x+h)(x+2h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)\,nh.$$

Résultat que l'on indique symboliquement par la formule :

$$\Delta x^{n|h} = nh\,(x+h)^{n-1|h}.$$

ce symbole est appelé faculté.

Différence de la fonction $\dfrac{1}{x(x+h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)}$.

Il viendra toujours de la même manière :

$$\Delta = \frac{1}{(x+h)(x+2h)\cdots(x+nh)} - \frac{1}{x(x+h)\ldots(x+\overline{n-1}\,h)}$$

$$= \frac{x-x-nh}{x(x+h)\ldots(x+nh)} = \frac{-nh}{x(x+h)\ldots(x+nh)}$$

et si l'on admet des indices négatifs pour les facultés, on posera encore le symbole :

$$\Delta x^{-n}\Big|^{h} = -nh\,x^{-(n+1)}\Big|^{h}$$

Calcul inverse des différences.

On se propose principalement dans ce calcul de trouver une fonction dont la différence soit égale à une fonction donnée $f(x)$.

On désigne cette fonction par la notation $\Sigma f(x)$; on voit donc que les signes Δ et Σ se détruisent mutuellement par définition.

Supposons qu'on ait trouvé une fonction $F(x)$ qui satisfasse à la question proposée et voyons quelle serait la solution générale. Désignons par $\varphi(x)$ ce qu'il faut ajouter à $F(x)$ pour obtenir cette solution générale, on aura :

$$F(x+h)-F(x)+\varphi(x+h)-\varphi(x)=f(x).$$

mais déjà : $F(x+h)-F(x)=f(x)$ par hypothèse on devra avoir :

$\varphi(x+h)-\varphi(x)=0$ ou $\varphi(x+h)=\varphi(x)$, la fonction φ est donc une fonction périodique dont la période est h.

On pourrait, par exemple ajouter à $F(x)$ une fonction de la forme : $\psi\left(\sin.\dfrac{2\pi x}{h},\ \cos.\dfrac{2\pi x}{h}\right)$

Dans la suite de ce calcul nous regarderons h comme constante ; en outre nous ne considérerons en même temps qu'une valeur x de la variable que les valeurs qui en diffèrent des divers multiples de h. Nous traiterons donc la fonction φ comme une simple constante, car nous n'aurons à nous occuper que des états de cette fonction pour lesquels

elle reprend une même valeur.

Dans le calcul intégral nous avons montré qu'une intégrale définie était la somme de ses éléments. Nous allons reconnaître une propriété analogue pour les intégrales aux différences finies.

Car, on a par hypothèse $\Delta F(x) = f(x)$. Il en résultera en considérant une suite de valeurs de $x : x_0, x_1, \ldots x_n$ les relations :

$$F(x_1) - F(x_0) = f(x_0)$$
$$F(x_2) - F(x_1) = f(x_1)$$
$$F(x_3) - F(x_2) = f(x_2)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F(x_n) - F(x_{n-1}) = f(x_{n-1})$$

En les ajoutant et réduisant il viendra :

$$F(x_n) - F(x_0) = f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})$$

ajoutant de part et d'autre $f(x_n)$ il viendra :

$$F(x_n) - F(x_0) + f(x_n) = S_{x_0}^{x_n} f(x),$$

n désignant par $S_{x_0}^{x_n} f(x)$ la série $f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)$

ou en d'autres termes $\sum_{x_0}^{x_n} f(x_{n+1}) = S_{x_0}^{x_n} fx.$

Avant d'intégrer quelques fonctions simples, nous démontrerons les deux théorèmes suivants :

1° $\Sigma(u+v-w) = \Sigma u + \Sigma v - \Sigma w + C.$ car en prenant les différences finies on a identiquement $u+v-w = u+v-w$.

2°. $\sum au = a \sum u$: cette propriété se vérifie exactement de la même manière.

Détermination de Σa^x, $\Sigma \sin.(ax+b)$ $\Sigma \cos.(ax+b)$.

Nous avons vu plus haut que $\Delta a^x = a^x(a^h-1)$ intégrons et divisons par a^h-1 il viendra :

$$\Sigma a^x = \frac{a^x}{a^h-1} + C.$$

Nous avons aussi trouvé :

$$\Delta \sin.(ax+b) = 2\sin.\frac{ah}{2}\cos.\left(ax+\frac{ah}{2}+b\right).$$

$$\Delta \cos.(ax+b) = -2\sin.\frac{ah}{2}\sin.\left(ax+\frac{ah}{2}+b\right).$$

Mettons partout x au lieu de $x+\frac{h}{2}$ et intégrons en divisant la première équation par $2\sin\frac{ah}{2}$ et la seconde par $-2\sin.\frac{ah}{2}$, il viendra :

$$\Sigma \cos.(ax+b) = C + \frac{\sin.\left(ax-\frac{ah}{2}+b\right)}{2\sin\frac{ah}{2}}.$$

$$\Sigma \sin.(ax+b) = C - \frac{\cos.\left(ax-\frac{ah}{2}+b\right)}{2\sin.\frac{ah}{2}}.$$

Ces formules peuvent servir à calculer très facilement des séries telles que :

$$\cos.a + \cos.2a + \cos.3a + \cdots\cdots + \cos.\,ma.$$

En effet cette série n'est autre chose que $S_{x=1}^{x=m}\cos.(ax)$ et nous savons que $S_{x=1}^{x=m}\cos.(ax) = \Sigma_{x=1}^{x=m+1}\cos.(ax)$.

D'ailleurs on tire de la formule établie précédemment :

$\Sigma \cos(ax) = C + \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\sin.a\left(x-\frac{1}{2}\right)$; il en résultera :

$\Sigma_{x=1}^{x=m+1}\cos.(ax) = \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\left[\sin.a\left(m+\frac{1}{2}\right) - \sin\frac{a}{2}\right]$ et telle sera la valeur de la série.

On trouverait identiquement de la même manière au moyen de la seconde formule:

$$\sin.a+\sin.2a+\dots+\sin(ma)=\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\left[\cos.\frac{a}{2}-\cos.a\left(m+\frac{1}{2}\right)\right]$$

__Intégrales d'une faculté ou factorielle.__

On a trouvé: $\Delta x^{n|h}=nh(x+h)^{n-1|h}$ en intégrant

$x^{n|h}=nh\sum(x+h)^{n-1|h}+C$ puis si l'on remplace x par $x-h$ et n par $n+1$:

$$\sum_{x=1}^{n=m+1}x^{n|h}=\frac{1}{(n+1)h}(x-h)^{n+1|h}$$

Nous pouvons immédiatement vérifier cette formule par exemple fort simple.

Posons: $n=1$, $h=1$, il viendra:

$$\sum_{x=1}^{x=m+1}x^{1|1}=\frac{1}{2}m^{2|1}=\frac{m(m+1)}{2}.$$ Résultat déjà connu car on avait évidemment à faire la somme des nombres $1,+2+3+\dots+m$.

On a encore trouvé: $\Delta x^{-n|h}=-nhx^{-(n+1)|h}$ remplaçant n par $n-1$ il viendra:

$$\sum x^{-n|h}=\frac{1}{-n+1}x^{-n+1|h}.$$

Il est vrai que cette formule serait en défaut dans le cas de $n=1$; mais dans nos applications nous ne considérerons pas ce cas particulier.

On peut encore vérifier cette formule par un exemple très simple.

Calculons $\sum x^{-2|1}$. On a en appliquant la formule générale $\sum x^{-2|1}=-x^{-1|1}=-\frac{1}{x}$. alors $\sum_{x=1}^{x=m+1}x^{-2|1}=1-\frac{1}{m+1}$

Résultat que l'on peut trouver directement car :

$$\sum_{x=1}^{x=m+1} x^{-2|1} = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\dots+\frac{1}{m(m+1)}$$

relation qui peut se mettre sous la forme :

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\dots\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right).$$

ou en réduisant $1-\frac{1}{m+1}$.

Lorsque m croîtra indéfiniment la série aura pour limite I.

On pourra sommer autant de séries que l'on voudra au moyen des mêmes procédés : appliquons les encore à :

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\dots+\frac{1}{m(m+1)(m+2)}$$

nous aurons encore évidemment à faire :

$$\sum_{x=1}^{x=m+1} x^{-3|1} \quad \text{or} \quad \sum x^{-3|1} = -\frac{1}{2}x^{-2|1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{2|1}}$$

il en résulte immédiatement :

$$\sum_{x=1}^{x=m+1} x^{-3|1} = \left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right]\frac{1}{2}$$

et si m croît indéfiniment on voit que cette série converge vers la valeur $\frac{1}{4}$.

Intégrale d'un Polynôme. On peut toujours trouver l'intégrale d'un polynôme algébrique. En effet, nous avons vu que la différence d'un polynôme algébrique était un polynôme de même forme et d'un degré d'une unité nous pourrons donc poser :

$$Ax^{m}+Bx^{m-1}+Cx^{m-2}+\dots=\Delta\left(A'x^{m+1}+B'x^{m}+C'x^{m-1}+D'x^{m-2}+\dots\right) \quad (1)$$

il en résultera :

$$\sum A x^m + B x^{m-1} + C x^{m-2} + \dots = A' x^{m+1} + B' x^m + C' x^{m-1} + D' x^{m-2} + \dots\dots$$

Il reste à déterminer convenablement $A', B', C' \dots$ et pour cela développons (1) et identifions les coefficients des mêmes puissances de x on aura :

$$A = \frac{m+1}{1.} A' h, \; B = \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} A' h^2 + \frac{m}{1} B' h,$$

$$C = \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} A' h^3 + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} B' h^2 + \frac{m-1}{1} C' h^2 + \text{etc.}$$

On en tirera $A', B', C' \dots$ etc. et la marche de ces valeurs fera bien voir que le problème peut toujours être résolu.

Dans le cas où le polynôme se réduit à x^m, on aura : $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, etc. ... d'où

$$A' = \frac{1}{(m+1)h}, \; B' = -\frac{1}{2}, \; C' = \frac{mh}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3}, \; D' = 0 \text{ etc},$$ il en résultera :

$$\sum x^m = \frac{x^{m+1}}{(m+1)h} - \frac{x^m}{1 \cdot 2} + \frac{mh}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{2 \cdot 3} x^{m-1} + F' x^{m-3} + \text{etc.}$$

Posons $h = 1$ et appliquons cette formule aux cas particuliers suivants.

1° $m = 0$ il en résulte $\sum x^0 = x - \frac{1}{1 \cdot 2}$ et si l'on veut avoir $\int_{x=1}^{x=x} x^0$ il faudra faire $\sum_{x=1}^{x=x+1} x^0$ ce qui donne

$$\int_{x=1}^{x=x} x^0 = \sum_{x=1}^{x=x+1} x^0 = x.$$ Résultat que l'on devait prévoir car chacun des termes de la série est égal à l'unité.

2° $m = 1$ alors : $\sum x = \frac{x^2}{2} - \frac{x}{1 \cdot 2} = \frac{x(x-1)}{1 \cdot 2}.$

puis : $$\int_{x=1}^{x=x} x = \sum_{x=1}^{x=x+1} x = \frac{(x+1)x}{1 \cdot 2}.$$

3°. $m=2$ $\sum x^2 = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x}{2.3} = \frac{2x^3-3x^2+x}{2.3} = \frac{(x-1)x(2x-1)}{1.2.3}$.

Il en résultera encore :

$$\int_{x=1}^{x=x} x^2 = \sum_{x=1}^{x=x+1} = \frac{x(x+1)(2x+1)}{2.3}.$$

Considérons enfin le cas de $m=3$, il viendra :

$$\sum x^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{1.2} + \frac{x^2}{4} = \frac{x^4-2x^3+x^2}{4} = \frac{x^2(x^2-2x+1)}{4} = \frac{x^2(x-1)^2}{4}$$

d'où

$$\int_{x=1}^{x=x} x^3 = \sum_{x=1}^{x=x} x^3 = \frac{(x+1)^2 x^2}{4}.$$

Ces résultats permettent de constater une propriété remarquable des nombres c'est que l'on a :

$$S(x^3) = \left[S(x)\right]^2.$$

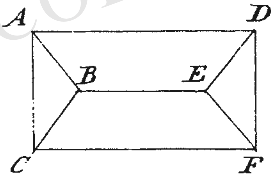
On peut appliquer ces formules à la sommation des piles de boulets.

<u>Piles</u> <u>triangulaires</u>. Soit x le nombre de boulets contenus sur un côté du triangle équilatérale qui forme la base. Celle-ci contiendra : $1+2+3+\dots+x = S(x) = \frac{x(x+1)}{2}$ boulets. Or, en supposant qu'on parte du sommet de la pyramide, on aura à faire cette somme, en y remplaçant successivement x, par $1, 2, 3 \dots$ jusqu'à x, en sorte que la pile contiendra un nombre de boulets égal à

$$\frac{1.2}{2} + \frac{2.3}{2} + \frac{3.4}{2} + \dots + \frac{x(x+1)}{2} = \frac{1}{2} Sx(x+1) = \frac{1}{2}\,\frac{x(x+1)(x+2)}{3}$$

<u>Piles</u> <u>quarrées</u>. Il est évident qu'en appelant x le nombre de boulets d'un côté du quarré qui forme la base le nombre de la pile sera : $S(x^2) = \frac{x(x+1)(2x+1)}{6}$.

<u>Piles rectangulaires</u>. En désignant par $a+1$ le nombre de boulets de la ligne de faîte BE, il est évident que la seconde tranche en contiendra $2(a+2)$, de même pour la troisième $3(a+3)$ et ainsi de suite de telle sorte que si la ligne AC contient x boulets la dernière tranche devra en contenir $x(a+x)$.



La somme totale des boulets sera donc égale à :

$$Sx(a+x) = aSx + Sx^2 = a\frac{x(x+1)}{2} + \frac{x(x+1)}{2}\,\frac{2x+1}{3} = \frac{x(x+1)}{2}\left[\frac{a+1+2(x+a)}{3}\right]$$

On pourra se rappeler cette formule en remarquant que cette expression est celle du volume du prisme tronqué ABCDEF ayant pour base ABC dans laquelle on a remplacé les hauteurs des sommets par les longueurs des arêtes.

On pourrait également assimiler les expressions obtenues à celles d'un prisme tronqué.

Euler a donné une formule qui permet d'obtenir une somme au moyen d'une intégrale définie, et vice versâ, une intégrale définie au moyen d'une somme.

Soient $f(x)$ une fonction quelconque de x et $F(x)$ son intégrale indéfinie. Comme $fx = F'(x)$, on a d'après la série de Taylor :

$$F(x) = h\sum f(x) + \frac{h^2}{1.2}\sum f'(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\sum f''(x) + \cdots\cdots$$

où en remplaçant $F(x)$ par sa valeur et sommant entre les limites x_0 et x_n

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h\sum_{x_0}^{x_n} f(x) + \frac{h^2}{1.2}\sum_{x_0}^{x_n} f'(x) + \frac{h^3}{1.2.3}\sum_{x_0}^{x_n} f''(x) + \cdots$$

On en tire :

$$(1)\ \sum_{x_0}^{x_n} f(x) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx - \frac{h}{1.2}\sum_{x_0}^{x_n} f'(x) - \frac{h^2}{1.2.3}\sum_{x_0}^{x_n} f''(x) \ldots\ldots$$

On se débarassera des intégrales aux différences $\sum_{x_0}^{x_n} f'(x)$, $\sum_{x_0}^{x_n} f''(x)$, ... en appliquant (1) aux fonctions $f'(x)$, $f''(x)$ ...... ce qui donne :

$$(2)\ \sum_{x_0}^{x_n} f'(x) = \frac{1}{h}\left[f(x_n) - f(x_0)\right] - \frac{h}{1.2}\sum_{x_0}^{x_n} f''x - \frac{h^2}{1.2.3}\sum_{x_0}^{x_n} f'''(x) \ldots\ldots$$

en remarquant que $\int f'(x)\,dx = f(x)$.

De même :

$$(3)\ \sum_{x_0}^{x_n} f''(x) = \frac{1}{h}\left[f'(x_n) - f'(x_0)\right] - \frac{h}{1.2}\sum_{x_0}^{x_n} f'''(x) - \frac{h^2}{1.2}\sum_{x_0}^{x_n} f^{IV}(x) \ldots\ldots$$

et ainsi de suite. On aura de cette manière une suite d'équations entre lesquelles on devra éliminer $\sum_{x_0}^{x_n} f'(x)$ $\sum_{x_0}^{x_n} f''(x)$, ... et pour cela on emploiera la méthode des multiplicateurs indéterminés. Multiplions donc (2) par $A_0 h$, (3) par $A_1 h^2$ et ajoutons il viendra :

$$\sum_{x_0}^{x_n} f(x) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx + A_0\left(f(x_n) - f(x_0)\right) +$$

$$A_1 h\left(f'(x_n) - f'(x_0)\right) + A_2 h^2\left(f''(x_n) - f''(x_0)\right) + \text{etc.}$$

avec les équations de conditions :

$$A_0 + \frac{1}{1.2} = 0,\quad A_1 + \frac{A_0}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = 0$$

$$A_1 + \frac{A_1}{1.2} + \frac{A_0}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} = 0 \quad \text{etc.}$$

On en tire $A_0 = -\frac{1}{2}, A_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}, A_2 = 0$ etc.
Ce qui donne enfin pour la formule d'Euler :

$$\sum_{x_0}^{x_n} f(x) = \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx - \frac{1}{2}\Big[f(x_n) - f(x_0)\Big] + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\Big[f'(x_n) - f'(x_0)\Big] + \cdots$$

On peut immédiatement établir que tous les coefficients des puissances paires de h tel que A_2 seront être nulles.
Pour cela, il suffit de remarquer que les valeurs numériques des coefficients A_0, A_1, A_2 etc. étant indépendantes de la nature de la fonction $f(x)$, on peut donner à celle-ci une forme particulière, pour arriver à leur détermination.

Prenons donc $f(x) = e^x$. On a alors,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx = e^{x_n} - e^{x_0} \text{ et } \sum_{x_0}^{x_n} e^x = \frac{e^{x_n} - e^{x_0}}{e^h - 1}.$$

Substituant dans la formule d'Euler et supprimant le facteur commun $e^{x_n} - e^{x_0}$ on aura :

$$\frac{1}{e^h - 1} = \frac{1}{h} - \frac{1}{2} + A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \text{etc} \ldots$$

$$\frac{1}{e^h - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{h} = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots$$

$$\frac{e^h + 1}{e^h - 1} - \frac{1}{h} = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots$$

Relation que l'on peut encore en multipliant haut et bas par $e^{-\frac{h}{2}}$ la fraction $\frac{e^h+1}{e^h-1}$ mettre sous la forme :

$$\frac{e^{\frac{h}{2}} + e^{-\frac{h}{2}}}{e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}}} - \frac{1}{h} = A_1 h + A_2 h^2 + A_3 h^3 + \cdots$$

Le premier membre reste le même en valeur absolue

quelque soit h, il ne fait que changer de signe; il faut donc que le second membre ne contienne que des puissances impaires de h.

Réciproquement on peut tirer de la formule d'Euler :

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h \sum_{x_0}^{x_n} f(x) + \frac{h}{2}\left(f(x_n) - f(x_0)\right) - \frac{1}{2}\,\frac{1}{6}\left(f'(x_n) - f'(x_0)\right) + \cdots$$

ou

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = h \sum_{x_0}^{x_n} f(x) + h\left[\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + \cdots + \frac{f(x_n)}{2}\right]$$

On voit facilement que le terme du second membre qui est affecté de la parenthèse, est égal à la somme des trapèzes inscrits dans la courbe $y = f(x)$, déterminés par les ordonnées correspondant aux abscisses $x_0, x_1, \ldots x_n$. Quant au premier membre $\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx$, c'est l'aire de la courbe entre les limites.

Formules d'interpolation.

Il arrive souvent que l'on connait un certain nombre de valeurs d'une fonction correspondantes à des valeurs connues de la variable. On peut alors se proposer de trouver d'autres valeurs de cette fonction comprises entre celles que l'on connait.

Tel est le but du problème de l'interpolation. La solution en est fondée sur cette notion qu'on peut regarder la figure d'une courbe comme déterminée avec une assez grande approximation dans une partie de son cours quand on connait un nombre suffisant d'ordonnées de cette courbe, car toute fonction d'une variable peut se représenter graphiquement par une courbe.

Formule de Newton. Supposons que l'on connaisse $n+1$ valeurs d'une fonction y_0; y_1, y_2, y_3 . . . . y_n correspon-

-dantes des valeurs de la variable et imaginons que ces valeurs croissent par degrés égaux à h.

On a dans ce cas :

$$y_n = (1+\Delta)^n \Delta y_0 = y_0 + \frac{n}{1}\Delta y_0 + \frac{n(n-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3.}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

Maintenant puisque nous cherchons une relation entre y et l'abscisse correspondante nous remarquerons que $x_n = x_0 + nh$ d'où $n = \frac{x - x_0}{h}$ de telle sorte que si nous supprimons les indices la formule précédente pourra être mise sous la forme :

$$y = y_0 + \frac{x-x_0}{h}\Delta y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)}{1.2.h^2}\Delta^2 y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_0-h)(x-x_0-2h)}{1.2.3.h^3}\Delta^3 y_0 + \cdots$$

Cette fonction est une relation continue entre x et y et d'ailleurs il est manifeste qu'elle satisfait à la condition d'interpolation; c'est-à-dire que pour les valeurs de x égales à $x_0, x_0+h \ldots x_0+nh$ y prendra les valeurs données par l'expression symbolique $(1+\Delta)^n \Delta y_0$.

<u>Formule de Lagrange</u>. Parmi toutes les courbes qui satisfont à la question on peut en choisir une de forme parabolique. On devra donc poser $y = A + Bx + Cx^2 + \ldots + Kx^n$ Le polynôme algébrique du second membre devant être seulement du degré n, car il devra seulement satisfaire aux $n+1$ conditions qui pour les valeurs quelconques de x égales à $x_0, x_1 \ldots x_n$ la fonction ait les valeurs correspondantes $y_0, y_1 \ldots y_n$. On devra donc avoir :

$$y_0 = A + Bx_0 + Cx_0^2 + \cdots\cdots + Kx_0^n$$
$$y_1 = A + Bx_1 + C_{x_1}^2 + \cdots\cdots + Kx_1^n$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n = A + Bx_n + Cx_n^2 + \dots\dots + Kx_n^n .$$

On a ainsi $n+1$ relations pour déterminer les $n+1$ coefficients $A, B, C \dots K$. A cet effet si l'on se rappelle que dans la relation d'un système d'équations du premier degré tel que le précédent les valeurs des inconnues $A, B, C \dots K$ sont des fonctions linéaires de $y_0, y_1 \dots y_n$, on en conclura que la valeur de y en y substituant les valeurs de ces coefficients sera aussi linéaire par rapport à ces quantités $y_0, y_1, \dots y_n$ de telle sorte que l'on pourra mettre les valeurs de y sous la forme :

$$y = P_0 y_0 + P_1 y_1 + P_2 y_2 + \dots\dots + P_n y_n .$$ ($P_0, P_1 \dots P_n$ étant des fonctions de $x, x_0 \dots x_n$ seulement).

Or, si dans cette relation nous posons $x = x_0$ le second membre devra identiquement se réduire à y_0 de telle sorte que pour cette valeur de $x = x_0$ on devra avoir $P_0 = 1, P_1 = 0, \dots\dots P_n = 0$. On conclurait de même que pour $x = x_1$ on devrait avoir $P_0 = 0, P_1 = 1, P_2 = 0 \dots\dots P_n = 0$ et ainsi de suite. P_0 sera donc de la forme :

$$P_0 = Q_0 (x - x_1)(x - x_2) \dots\dots (x - x_n)$$

d'ailleurs on doit avoir :

$$1 = Q_0 (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)$$

ce qui donne $P_0 = \dfrac{(x - x_1)(x - x_2) \dots\dots (x - x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots\dots (x_0 - x_n)}$

Les autres coefficients auraient des expressions en tout analogues ce qui donnera définitivement pour la formule de Lagrange :

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}y_1 + \text{etc.}$$

Il est d'ailleurs facile de voir que toute fonction algébrique du degré n qui satisferait aux mêmes conditions coïnciderait avec celle-ci.

Car supposons que $y = A' + B'x + C'x^2 + \cdots + K'x^n$ satisfasse à la question. On devra avoir :

$y_0 = A' + B'x_0 + C'x_0^2 + \cdots + K'x_0^n$ d'ailleurs on a

$y_0 = A + Bx_0 + Cx_0^2 + \cdots + Kx_0^n$ en retranchant on devra avoir : $0 = A - A' + (B-B')x_0 + (C-C')x_0^2 + \cdots + (K-K')x_0^n$.

Il en serait de même pour les autres valeurs $x_1, x_2, \ldots x_n$ de telle sorte que l'équation :

$$A - A' + (B-B')x + (C-C')x^2 + \cdots\cdots + (K-K')x^n = 0$$

du degré n devrait avoir $n+1$ racines $x_0, x_1 \ldots\ldots x_n$ ce qui exige que $A - A' = 0$, $B - B' = 0$ etc.

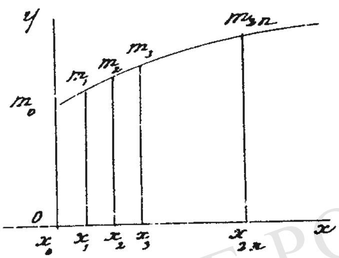
Au lieu des différences $x - x_0$, $x - x_1$ etc. on pourrait mettre leurs carrés et ces mêmes conditions n'en seraient pas moins satisfaites ; on pourrait encore les remplacer par $\sin.(x-x_0)$, $\sin(x-x_1)$ et même par $\sin. m(x-x_0)$, $\sin m(x-x_1)$ etc (m étant quelconque). Tout ceci fait voir combien le problème de l'interpolation est indéterminé.

Les formules d'interpolation peuvent servir à déterminer par approximation les rectifications, quadratures et cubatures. Remarquons que toutes ces questions reviennent à calculer par approximation une intégrale simple définie.

En supposant que l'on ait n ordonnées de la courbe

dont cette intégrale définie représente l'aire, on pourra la remplacer par la parabole du degré $n-1$ qui passerait par les mêmes points; on prendrait alors pour l'expression générale de l'ordonnée une des formules obtenues plus haut et en effectuant l'intégration $\int_{x_0}^{x_n} y\,dx$, on atteindrait le but qu'on se propose.

Mais, au lieu d'opérer ainsi, on peut faire passer par trois points consécutifs une suite de paraboles du deuxième degré dont l'axe serait parallèle à l'axe des y (nous supposerons d'ailleurs que x croisse par degrés égaux, et que le nombre des intervalles considérés soit pair et égal à $2n$).



Soit $y = A + Bx + Cx^2$ l'équation de la première parabole on aura: $y_0 = A$, $y_1 = B + Bh + Ch^2$, $y_2 = A + 2Bh + 4Ch^2$ et l'aire de la parabole sera égale à

$$\int_0^{2h} y\,dx = \int_0^{2h} (A + Bx + Cx^2)\,dx = \left[Ax + \frac{Bx^2}{2} + \frac{Cx^3}{3}\right]_0^{2h}$$

$$= \frac{h}{3}\left[6A + 6Bh + 8Ch^2\right] = \frac{h}{3}\left[y_0 + 4y_1 + y_2\right]$$

L'aire de la parabole suivante serait $\frac{h}{3}\left[y_2 + 4y_3 + y_4\right]$

et ainsi de suite jusqu'à la dernière qui serait:

$\frac{h}{3}\left[y_{2n-2} + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right]$. L'aire totale sera donc exprimée par la somme:

$$\frac{h}{3}\left[y_0+y_{2n}+4\left(y_1+y_3+\cdots+y_{2n-1}\right)+2\left(y_2+y_4+\cdots+y_{2n-2}\right)\right]$$

Cette formule est dite formule de Thomas Simpson.

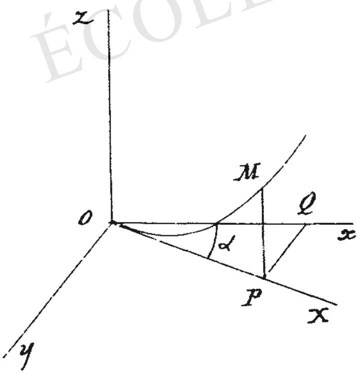
Courbure des surfaces.

Pour étudier la courbure d'une surface en un point quelconque, on fait des sections planes dans toutes les directions autour de ce point ; il est naturel d'étudier d'abord les sections faites par les plans passant par la normale.

Comme nous voulons maintenant étudier avant tout la loi de la courbure, nous choisirons nos axes d'une manière particulière propre à simplifier nos démonstrations.

Désignons l'axe des z suivant la normale MN et les deux autres axes d'une manière quelconque dans le plan des xy.

Soit, $z=f(x,y)$ l'équation de la surface, nous emploierons dans tout ce qui va suivre les notations suivantes :



$$\frac{dz}{dx}=p,\ \frac{dz}{dy}=q,\ \frac{d^2z}{dx^2}=r,\ \frac{d^2z}{dxdy}=s,$$

$$\frac{d^2z}{dy^2}=t$$

Fesons dans la surface une section normale zOX et cherchons la courbure de cette section au point O. On peut trouver l'équation de cette surface dans son plan. En effet, comptons de nouvelles abscisses X suivant OX. Soit M un point quelconque de cette section et α l'angle de cette section avec le plan des zx on aura :

$x = X\cos.\alpha$, $y = X\sin.\alpha$ et par conséquent
$z = f(X\cos.\alpha, X\sin.\alpha)$ telle sera l'équation cherchée.

Appelons ρ le rayon de courbure de la section $\rho = \dfrac{\left(1+\frac{dz^2}{dX^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2z}{dX^2}}$;

sans recourir à l'équation de la section on tirera de $z=f(x,y)$,

$$\frac{dz}{dX} = p\frac{dx}{dX} + q\frac{dy}{dX} = p\cos\alpha + q\sin.\alpha$$

$$\frac{d^2z}{dX^2} = r\cos.^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos.\alpha + t\sin.^2\alpha$$ substituant

on aura : $\rho = \dfrac{(1+(p\cos.\alpha + q\sin\alpha)^2)^{\frac{3}{2}}}{r\cos.^2\alpha + 2s\sin\alpha\cos\alpha + t\sin.^2\alpha}$

et comme pour le point O $p=0$, $q=0$ on aura :

$$\rho = \frac{1}{A\cos.^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos.\alpha + C\sin.^2\alpha}.$$

On remarquera que généralement les quantités A B, C ne contiendront pas α car ce sont des valeurs de r, s, t tirées de l'équation $z=f(x,y)$. Pourtant il pourrait se faire que A se présentât sous la forme $\dfrac{ax+by}{a'x+b'y}$ valeur qui pour le point O devient $\frac{0}{0}$. Si pourtant on divise les deux termes par x il viendra $\dfrac{a+b\frac{y}{x}}{a'+b'\frac{y}{x}}$ qui devient déterminé et qui dépend de α car en ce point $\frac{y}{x} = tg.\alpha$

Le signe de ρ indiquera si la surface est au dessus ou au dessous du plan tangent dans les environs du point con-

-sidérée. En effet, pour un point voisin du point (x, y, z) on a $Z = f(x+dx, y+dy)$.

$$Z = z + p\,dx + q\,dy + \frac{1}{2}(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2) + \text{etc.}$$

et si le point considéré est l'origine :

$$Z = \frac{1}{2}\left[A\,dx^2 + 2B\,dx\,dy + C\,dy^2\right] = \frac{1}{2}dx^2\left[A + 2B\frac{dy}{dx} + C\frac{dy^2}{dx^2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}dx^2\left[A + 2B\,tg.\alpha + C\,tg^2\alpha\right]$$

D'ailleurs la valeur de ρ peut se mettre sous la forme :

$$\rho = \frac{1}{\cos.^2\alpha\left[A + 2B\,tg.\alpha + C\,tg.^2\alpha\right]}$$ résultat qui montre bien que Z aura toujours le même signe que ρ.

On voit que le rayon de courbure variera pour chaque section considérée puisque son expression dépend de l'angle α on peut se demander s'il existe une section pour laquelle ce rayon de courbure soit maximum ou minimum. Et d'abord remarquons qu'il suffira de chercher les maxima ou minima de $\frac{1}{\rho} = A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$.

Il vient alors :

$$\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{d\alpha} = -2A\cos.\alpha\sin.\alpha + 2B\left[\cos.^2\alpha - \sin.^2\alpha\right] + 2C\cos.\alpha\sin.\alpha) = 0.$$

d'où $tg.\,2\alpha = \frac{2B}{A-C}$ désignons par α le plus petit angle qui satisfait à cette équation. Les deux seules valeurs réellement distinctes qu'elle fournira seront α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$ et les sections correspondantes seront à angle droit l'une sur l'autre.

De ces deux sections l'une répond à un maximum et l'autre à un minimum pourvu que l'on ait égard aux signes. En effet.

$$\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{d^2 \alpha} = 2(C-A)\cos.2\alpha - 4B\sin.2\alpha.$$

Or, les deux valeurs de 2α que l'on y substituera ayant pour différence π donneront des résultats de signes contraires. Ces deux sections sont dites sections principales de plus grande ou plus petite courbure.

Si l'on prend leur plan pour plan des coordonnées il faudra que tg $2\alpha = 0$ d'où $B = 0$ et la valeur du rayon de courbure deviendra:

$$\rho = \frac{1}{A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha}, \quad \frac{1}{\rho} = A\cos.^2\alpha + C\sin^2\alpha$$

Appliquant cette formule aux deux sections principales il faudra faire $\alpha = 0$, $\alpha = 90°$ et en désignant par R et R' les rayons de courbure correspondants il viendra:

$$\frac{1}{R} = A, \frac{1}{R_1} = B. \text{ d'où } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos.^2\alpha + \frac{1}{R}\sin.^2\alpha.$$

Cette formule dite formule d'Euler, montre que la détermination des rayons de courbure des sections normales dépend de celle des rayons de courbure des sections principales.

D'ailleurs on en déduira facilement que

1° Deux sections normales symétriquement placées par rapport aux sections principales auraient même courbure, car on voit que cette valeur de $\frac{1}{\rho}$ est la même pour α et $-\alpha$.

2° Deux sections normales perpendiculaires l'une à l'autre sont telles que la somme de leurs courbures soit constante et égale à la somme des courbures des sections principales.

En effet, pour avoir les rayons de courbure correspondant à ces deux sections il faudra substituer successivement α et $90^\circ+\alpha$ ce qui donnera : $\frac{1}{\rho'}=\frac{1}{R}\sin^2\alpha+\frac{1}{R'}\cos^2\alpha$ et

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}\cos^2\alpha+\frac{1}{R'}\sin^2\alpha.$$

Ajoutant ces deux relations, il viendra :

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}=\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}.$$

Nous allons maintenant discuter la valeur générale de ρ en nous servant de la formule (1) $\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}\cos^2\alpha+\frac{1}{R'}\sin^2\alpha$, et en ayant égard aux signes relatifs de R et de R'.

Supposons d'abord R et R' tous deux positifs et soit $R>R'$. On voit qu'alors la formule (1) donne pour ρ une valeur toujours positive et par conséquent la surface est convexe autour du point O. Il est évident que la même chose aurait lieu, si R et R' étaient tous deux négatifs, seulement la surface encore convexe dans les environs du point O et tout contour de ce point serait au dessous du plan tangent au lieu d'être au dessus de ce plan.

Étudions maintenant la marche des valeurs successives de ρ. Remarquons, pour cela que l'équation (1) donne

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{R}+\left(\frac{1}{R'}-\frac{1}{R}\right)\sin^2\alpha.$$

Pour $\alpha=0$ on a $\rho=R$. Quand α croît d'une manière continue, depuis 0 jusqu'à $\frac{\pi}{2}$, $\sin^2\alpha$ augmente constamment et par conséquent ρ diminue continuellement dans l'intervalle. Enfin quand $\alpha=\frac{\pi}{2}$ on a $\rho=R'$. Ensuite, quand α continue à croître de $\frac{\pi}{2}$ à π les mêmes valeurs

de ρ se reproduisent dans un ordre inverse.

Il est un cas à examiner : c'est que les rayons de courbure R et R' sont égaux et de même signe. La formule précédente donne $\rho = R$. Ainsi, dans ce cas, toutes les sections normales ont le même rayon de courbure. En même temps, la relation $tg.\, 2\alpha = \dfrac{2B}{A-C}$, qui détermine la position des sections principales devient $tg.\, 2\alpha = \frac{0}{0}$. En effet, $B=0$, puisque par hypothèse, les plans zox et zoy contiennent deux sections principales ; de plus $A=C$ parce que ayant trouvé $R=\dfrac{1}{A}$ et $R'=\dfrac{1}{C}$, on a par hypothèse $R=R'$.

Ainsi on peut dire alors que toutes les sections normales sont des sections principales. Un tel point O qui jouit de la propriété que toutes les sections normales passant par ce point ont la même courbure, est appelé un <u>ombilic</u> de la surface. Par exemple, tous les points d'une sphère sont des ombilics. De même, une surface de révolution a un ombilic à chacun des points où sa courbe méridienne est rencontrée par l'axe, pourvu que l'intersection de l'axe et de la courbe se fasse à angle droit. Du reste, il existe aussi des ombilics sur certaines surfaces qui ne sont pas de révolution.

Supposons maintenant que R et R' aient des signes contraires. Soit par exemple, $R > 0$ et $R' < 0$. Mettons dans (1) le signe de R' en évidence en changeant R' en $-R'$, il vient :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R}\cos.^2\alpha - \frac{1}{R'}\sin.^2\alpha = \frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R'} + \frac{1}{R}\right)\sin^2\alpha$$

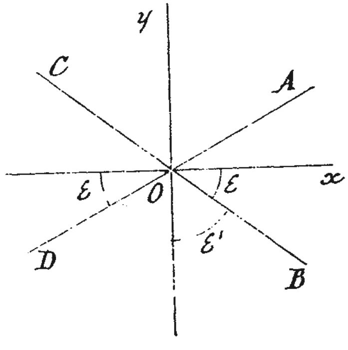
Si $\alpha = 0$ on a $\rho = R$. Puis si α commence à croître à partir de 0 ρ reste positif tant que

$\frac{1}{R} - \left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R}\right)\sin^2\alpha > 0$, ou tant que α est plus petit que l'angle ε donné par $\sin^2\varepsilon = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R'}+\frac{1}{R}}$. Dans cet intervalle, $\frac{1}{\rho}$ diminuant sans cesse, ρ augmente constamment lorsque α prend la valeur ε ρ étant infini. Ainsi quand α croît depuis 0 jusqu'à ε le rayon de courbure va sans cesse en augmentant positivement de R jusqu'à l'infini.

Quand α surpasse un peu ε mais d'une quantité très petite, $\frac{1}{\rho}$ devient négatif et très petit en valeur absolue; donc le rayon de courbure est négatif et sa valeur absolue est très grande. Puis lorsque α continue à croître, ρ reste négatif, mais en valeur absolue il diminue constamment et devient égal à $-R'$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi en résumant, 0 à $\frac{\pi}{2}$, ρ augmente depuis R jusqu'à ∞ et diminue de $-\infty$ à $-R'$ en valeur absolue. Au delà on sait que les mêmes valeurs de ρ se reproduisent dans un ordre inverse puisqu'il a été démontré que les rayons de courbure des sections également inclinées sur une section principale sont égaux et de mêmes signes.

D'ailleurs il résulte de cette symétrie qu'il y a une autre droite faisant un angle égal à $\pi - 2$ jouissant de la même propriété que CB de sorte que la surface autour du point O se trouvera partagée par son plan tangent en quatre plages telles que la surface se trouve au dessus de l'angle AOB et son opposé par le sommet et au dessous dans



les deux autres plages. Et si l'on désigne par ε' le complément de l'angle ε comme

$$\sin^2\varepsilon = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}} \quad \text{on aura} \quad \sin^2\varepsilon' = \frac{\frac{1}{R'}}{\frac{1}{R'}+\frac{1}{R}}$$

et $\sin^2\varepsilon : \sin^2\varepsilon' :: \frac{1}{R} : \frac{1}{R'}$. Il en résulte que chacune des plages sera d'autant plus petite que le rayon de courbure de la section principale correspondante sera plus grand ; de telle sorte que si l'un des rayons de courbure est infini la plage correspondante n'existera pas et la surface se trouvera tout d'un même côté du plan tangent. C'est ce qui arrive dans les cylindres et les cônes car toute section méridienne coupe le plan tangent suivant une génératrice pour laquelle le rayon de courbure est infini et dans les environs d'un point considéré, la surface se trouvera toujours d'un même côté du plan tangent.

On peut aussi étudier la surface en un point déterminé en établissant entre elle et une surface du second ordre un contact du deuxième ordre.

Et pour cela, si l'on se rappelle que la valeur de Z pour un point voisin du point considéré peut se mettre sous la forme :

$$Z = z + p\,dx + q\,dy + \frac{1}{1\cdot 2}\left(r\,dx^2 + 2s\,dx\,dy + t\,dy^2\right) + \text{etc.}$$

Il est nécessaire que pour un même système de valeurs déterminées données à $[x, y]$ les quantités z, p, q, r, s, t coïncident. On peut voir de nouveau que la sphère ne satisfera pas généralement car son équation la plus

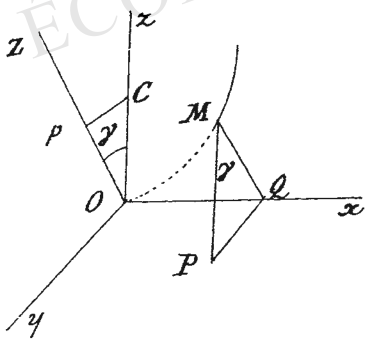
générale ne contient que quatre constantes arbitraires pour déterminer les six quantités précédentes.

Tandis que si l'on suppose toujours que l'on prenne les plans coordonnés déjà considéré ce qui donne
$Z=\frac{1}{2}\left(A dx^2+2B\,dx\,dy+C dy^2\right)$, on voit immédiatement que le paraboloïde représenté par l'équation
$Z=\frac{1}{2}\left(Ax^2+2Bxy+Cy^2\right)$ satisfera à la condition d'avoir en ce point un contact du second ordre avec la surface donnée.

<u>Sections obliques</u>. Il nous reste à montrer comment la courbure des sections obliques peut être déterminée au moyen de la courbure des sections normales.

Pour simplifier les raisonnements, nous continuerons à prendre la normale pour axe des Z et le plan tangent pour plan des x, y. Supposons en outre que le plan des xz coïncide avec une section normale quelconque.

Soit ZOx une section oblique passant par la droite Ox. Rapportons la courbe correspondante aux axes Ox et OZ pris dans son plan ; nous aurons en désignant par γ l'angle de la section avec le plan ZOx et par Z la nouvelle coordonnée MQ, $z = Z\cos\gamma$, $y = Z\sin\gamma$, de sorte que si l'équation de la surface est $z=f(x,y)$ l'équation de la section dans son plan sera



$Z\cos\gamma = f(x, Z\sin\gamma)$.

Pour calculer son rayon de courbure $\rho_\gamma = \dfrac{\left(1+\frac{dZ^2}{dx^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2Z}{dx^2}}$ nous

conservons l'équation $Z \cos\gamma = f(x,y)$ jointe à la relation $y = Z \sin\gamma$. Différentions une première fois :

$$\frac{dZ}{dx}\cos.\gamma = p + q\frac{dy}{dx} = p + q \cdot \frac{dZ}{dx}\sin.\gamma .$$

Le plan des xy étant tangent à la surface on a $p=0$, $q=0$ et par suite $\frac{dZ}{dx}=0$.

Pour obtenir $\frac{d^2Z}{dx^2}$, il faut différentier l'expression précédente. En supprimant les termes qui deviennent nuls on aura $\frac{d^2Z}{dx^2}\cos.\gamma = r$. Donc $\rho_\gamma = \frac{\cos.\gamma}{r} = \rho\cos.\gamma$ car si $\gamma=0$ on a $\rho=\frac{1}{r}$. Il en résulte que si OC représente le rayon de courbure de la section normale ZOx, sa projection Op sur le plan de la section oblique sera ρ_γ ou mieux que si du point C comme centre on imagine une sphère ayant pour rayon CO toute section oblique ayant la même tangente Ox que la section normale ZOx coupera cette sphère suivant un petit cercle dont le rayon sera égal à son rayon de courbure. Ce théorème constitue ce que l'on appelle Théorème de Meunier.

Il suffit d'après ce théorème de connaître les rayons de courbure principaux d'une surface en un de ses points pour calculer les rayons de courbure de toutes les sections planes que l'on peut faire par ce point. De même il suffira de connaître les rayons de courbure de deux sections normales quelconques et leur angle, car on en conclura immédiatement les rayons principaux.

On peut remarquer que cette sphère décrite avec CO pour rayon a un contact du 2e ordre avec la section

ZOx ; elle aura évidemment un contact du même ordre avec la section symétrique et par suite elle nous offre l'exemple d'une sphère pouvant avoir un contact du 2^e. ordre avec une surface dans plusieurs directions quoique d'après ce que nous avons démontré précédemment, elle ne puisse pas avoir avec la surface un contact de cet ordre dans toutes les directions.

Théorie de Monge. Généralement les normales d'une surface en deux points même infiniment voisins ne se rencontrent pas ; nous allons faire voir qu'on peut néanmoins toujours trouver deux directions autour de chaque point d'une surface suivant lesquelles les normales se rencontrent.

Soient $\begin{cases} X-x+p(Z-z)=0 \\ Y-y+q(Z-z)=0 \end{cases}$ les équations de la normale

à la surface en un point quelconque

$[x, y, z]$ et $\begin{matrix} X-x'+p'(Z-z')=0 \\ Y-y'+q'(Z-z')=0 \end{matrix}$ celles d'une autre normale

en un autre point $[x', y', z']$.

Pour exprimer qu'elles se rencontrent il suffira d'éliminer X, Y, Z entre ces quatre équations ce qui donnera pour condition :

$$\frac{p'z'-pz+x'-x}{p'-p} = \frac{q'z'-qz+y'-y}{q'-q}$$

Cette équation jointe à celle de la surface donnerait les deux équations de la courbe jouissant de la propriété ci-dessus énoncée.

Mais comme nous ne voulons considérer les directions infiniment voisines, la relation précédente deviendra en supposant le point $[x', y', z']$, infiniment voisin du point $[x, y, z]$

$$\frac{d(pz)+dx}{dp} = \frac{d(qz)+dy}{dq}$$

$$z+\frac{p\,dz+dx}{dp} = z+\frac{q\,dz+z\,dq}{dq}.$$

Substituant: $dz = p\,dx + q\,dy$

$dp = r\,dx + s\,dy$, $dq = s\,dx + t\,dy$, on en tire en divisant par dx

$$\frac{1+p^2+pq\frac{dy}{dx}}{r+s\frac{dy}{dx}} = \frac{(1+q^2)\frac{dy}{dx}+pq}{s+t\frac{dy}{dx}}$$

ou en chassant les dénominateurs:

$$\left[pqt-(1+q^2)s\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[(1+p^2)t-(1+q^2)r\right]\frac{dy}{dx}+(1+p^2)s-pqr=0.$$

On voit qu'en général il y aura deux directions.

Pour mieux étudier ces directions, plaçons l'origine au point considéré et prenons le plan tangent pour plan des xy. On a alors $p=0$, $q=0$, et l'équation précédente devient:

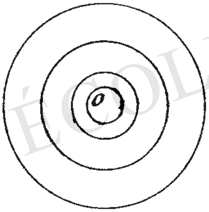
$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{r-t}{s}\frac{dy}{dx}-1=0.$$

Cette équation montre bien que les deux directions que l'on doit suivre sont perpendiculaires l'une à l'autre car le produit des racines est égal à -1 et de plus on voit qu'elles coïncident avec celles des sections principales car si l'on

prend le plan de ces sections pour plan des coordonnées on a $S=0$ et dans ce cas l'une des racines est égale à 0 et l'autre à ∞ ce qui fait retomber sur les deux plans coordonnés en sections principales.

On a vu que lorsqu'une courbe était définie par une relation entre le coëfficient angulaire de sa tangente et les coordonnées du point de contact, elle n'était pas particularisée par cela même; car la relation primitive qui représente l'intégrale générale contient une constante arbitraire et par suite représente une série de courbes différentes les unes des autres par la valeur particulière attribuée à la constante.

Ainsi lorsqu'on se propose de déterminer la courbe qui jouit de la propriété que sa normale passe constamment par un point déterminé, on trouve une série de circonférences



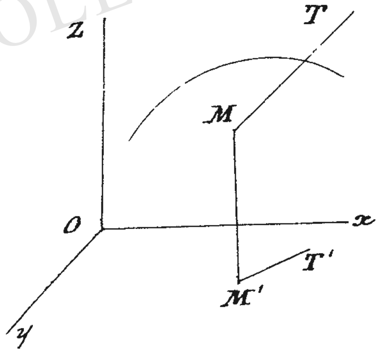
concentriques décrites de ce point O comme centre. Il est d'ailleurs évident que cette série de circonférences couvrira complètement le plan puisque par tout point pris sur ce plan il passera une de ces courbes.

Il en sera de même pour toute autre série de courbes planes données par une question de même nature, car la relation $\Phi(x,y)=C$ donnera une valeur particulière de la constante correspondant à chaque système de valeurs de x et de y.

La même propriété se représente lorsque la courbe doit être située sur une surface. Lorsqu'on donnera des relations telles que connaissant les coordonnées d'un quelconque de cette courbe on puisse construire la tangente correspondante, l'ensemble de ces relations ne suffira pas pour définir la courbe; il existera une infinité de courbes satisfaisant à la question

et leur ensemble couvrira entièrement la surface.

Au fond, cette question revient à la précédente. Car, si l'on considère un point M quelconque de cette courbe située sur la surface, on pourra par définition construire la tangente M T à la courbe en ce point et par suite on connaîtra la projection M'T' de cette droite. Et comme M'T' est évidemment la tangente à la projection de la courbe cherchée sur le plan des x y, on voit que la définition donnée de la courbe aura servi à établir une relation entre les coordonnées de chaque point et la tangente correspondante de la projection de la courbe sur le plan des xy.



On retombe alors dans le cas précédent, on construira ainsi une infinité de courbes qui couvriront entièrement le plan des xy, et les intersections de la surface avec les cylindres droits ayant ses courbes pour bases détermineront les courbes cherchées.

Il en résulte immédiatement qu'il y en aura une infinité et qu'elles couvriront entièrement la surface puisque leurs projections sur le plan des xy couvrent entièrement ce plan.

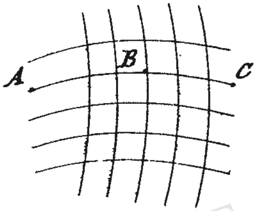
Lignes de Courbure. On appelle ligne de courbure une courbe qui en chacun de ses points est tangente à la section principale qui passe par ce point.

On se retrouve dans le cas que nous avons précédemment examiné, on connaît en chaque point la tangente à la courbe cherchée puisqu'elle coïncide avec celle de la section principale en ce point et de plus elle doit être située sur la surface donnée.

Il en résulte qu'il y a sur une surface donnée une infinité

de lignes de courbure qui la couvre entièrement et que chacune de ces lignes ne sera parfaitement définie qu'autant qu'on l'assujettira à passer par un point déterminé.

On voit de plus que puisque pour éléments infiniment petits ces courbes coïncident avec les sections principales, il y aura en chaque point de la surface deux lignes de courbure qui se coupent à angle droit. Il existera donc sur la surface deux lignes de courbure telles que l'une quelconque de l'une des séries coupe à angle droit toutes celles de l'autre série; elles partageront ainsi la surface en petits rectangles curvilignes aussi petits que l'on voudra.



Toutefois il peut arriver que l'une quelconque de ces lignes de courbure soit tangente de A en B aux sections principales de plus grande courbure, puis de B en C aux sections principales de plus petite courbure. Pour cela il faudra nécessairement puisque nous supposons la surface continue qu'au point B les deux rayons de courbure principaux, maximum et minimum soit égaux, ce qui caractérise comme nous l'avons déjà fait remarquer, des points singuliers de la surface ombilics.

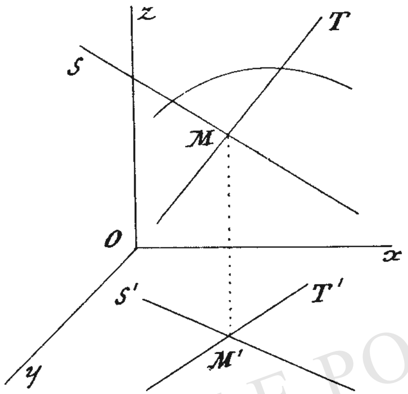
Détermination des lignes de Courbure.

Le procédé qui se présente naturellement à l'esprit, en vertu de la définition même que nous avons donnée de ces lignes serait de déterminer en un point considéré de la surface les deux sections principales. On construirait leurs tangentes en ce point et comme l'équation de la surface donne z en fonction de x et de y on obtiendrait pour leur détermination une relation de la forme:

$\frac{dy}{dx} = \Phi(x, y)$ qui ne serait autre chose que l'équation différentielle de la projection de la ligne de courbure sur le plan des xy.

En intégrant cette relation on aurait l'équation de sa projection et l'on construirait facilement la courbe elle-même.

Mais ce procédé serait plus long à cause du choix d'axes que nous avons fait pour simplifier les résultats dans la recherche des sections principales.



Ainsi pour déterminer les directions des sections principales au point M il faudrait opérer une première transformation de coordonnées en transportant l'origine au point M, et prenant pour nouvel axe des z la normale à la surface au point M.

Ayant alors au moyen des formules précédemment établies, déterminé les directions des sections principales par rapport à ces nouveaux axes de coordonnées, il faudrait encore revenir par une transformation inverse aux anciens axes car on ne peut pas considérer autant de systèmes d'axes que de points.

On détermine alors l'équation des lignes de courbure au moyen d'une autre propriété.

Il existe sur la surface une courbe AB définie par cette condition que les normales rencontrent toutes la normale AN en un point de départ A. A la fin de la leçon précédente on a constaté son existence, et de plus on a fait voir qu'elle était tangente aux sections principales qui passent par le point



A : elle sera donc tangente aux lignes de courbure qui passent par ce point car deux courbes tangentes à une troisième sont tangentes entr'elles.

Cela posé, soit AB la ligne de courbure ; puisque AB et A' B' sont tangentes au point A ; si l'on suppose les arcs AB et AB' infiniment petits et égaux, les coordonnées des points B et B' pourront être considérées comme égales à un infiniment petit du second ordre près, et la normale à la surface au point B pourra être considérée comme coïncidant avec la normale à la surface au point B' à des infiniment petits du second ordre près de telle sorte que si l'on convient de négliger les infiniment petits de cet ordre, on voit que la ligne de courbure jouit de la propriété que deux de ses normales infiniment voisines se rencontrent ; les normales à cette courbe formeront donc une surface développable dont l'arête de rebroussement sera la courbe lieu de leurs intersections successives.

C'est cette propriété que l'on prend pour point de départ dans la recherche des lignes de courbure.

Nous allons l'exprimer analytiquement. Les équations de deux normales en deux points infiniment voisins de la surface seront :

$$\begin{array}{ll}(1) & x-x'+p(z-z')=0\\ (2) & y-y'+q(z-z')=0\\ (3) & x-x'-dx'+(p+dp)(z-z'-dz')=0\\ (4) & y-y'-dy'+(q+dq)(z-z'-dz')=0.\end{array}$$

Il faut exprimer qu'elles se rencontrent en négligeant les infiniment petits d'un ordre supérieur au premier.

En retranchant (3) de (1) et (4) de (2) il vient :

$$dx' - dp\,(z-z') + p\,dz' = 0 \quad (5)$$

$$dy' - dq\,(z-z') + q\,dz' = 0 \quad (6)$$

il faut pour que le système de ces équations soit compatible que les deux valeurs de $z-z'$ tirées de ces deux relations soient égales ce qui donne :

$$(7)\quad \frac{dx' + p\,dz'}{dp} = \frac{dy' + q\,dz'}{dq}$$; telle est la condition pour que ces deux points infiniment voisins appartiennent à une même ligne de courbure.

En mettant dans (7) les valeurs de $dz' = p\,dx' + q\,dy'$, $dp = r\,dx' + s\,dy'$, $dq = s\,dx' + t\,dy'$ et négligeant encore les infiniment petits du deuxième ordre il viendra :

$$\frac{dx'(1+p^2) + pq\,dy'}{r\,dx' + s\,dy'} = \frac{dy'(1+q^2) + pq\,dx'}{s\,dx' + t\,dy'}.$$

En chassant les dénominateurs et divisant par dx'^2 :

$$\left(\frac{dy'}{dx'}\right)^2 \left[pqt - s(1+q^2)\right] + \frac{dy'}{dx'}\left[(1+p^2)t - (1+q^2)r\right] + (1+p^2)s - pqr = 0 \quad (8)$$

Comme d'ailleurs les dérivées $p, q, r, \ldots$ peuvent être exprimées en fonction de x et y seulement au moyen de l'équation de la surface on a une relation entre le $\frac{dy}{dx}$ et x et y des coordonnées de la ligne de courbure. L'équation primitive qui résulte de son intégration donnera la projection de la courbe cherchée sur le plan des xy et par suite en la joignant à celle de la surface on aura les équations de la ligne de courbure.

On peut immédiatement vérifier qu'il y en a deux car

l'équation qui détermine $\frac{dy}{dx}$ est du second degré et de plus si on prend la normale pour axe des z l'équation devient puisque dans ce cas p et q sont nuls

$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{r-t}{s}\right)\frac{dy}{dx} - 1 = 0.$ Et cette équation comparée à

$tg.^2\alpha + \left(\frac{r-t}{s}\right) tg.\alpha - 1 = 0$ qui sert à déterminer les sections principales lui est identique, ce qui vérifie encore que les lignes de courbure ont un élément commun avec les sections principales.

<u>Application à la recherche des lignes de courbure des surfaces de révolution.</u>

L'équation générale de ces surfaces est $z = \Phi(x^2+y^2)$. On en tire en différentiant : $p = \Phi'.2x$, $q = \Phi'.2y$

$r = 2\Phi' + 4x^2\Phi''$, $s = 4xy\Phi''$, $t = 2\Phi' + 4y^2\Phi''$.

En substituant dans (8) il viendra :

$$\left[8\Phi'^3 - 4\Phi''\right]\left[xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dx}(x^2-y^2)^2 - xy\right] = 0.$$

En excluant le cas où $8\Phi'^3 - 4\Phi'' = 0$ auquel cas nous verrons que la surface donnée est une sphère pour laquelle toutes les sections normales sont des lignes de courbure.

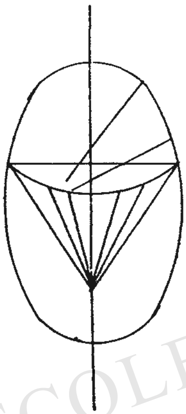
on aura : $xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2-y^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$

pour l'intégrer on la résout par rapport à $\frac{dy}{dx}$ ce qui donne :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2 \pm \sqrt{(y^2-x^2)^2 + 4x^2y^2}}{2xy} = \frac{y^2 - x^2 \pm (y^2+x^2)}{2xy}$$

ce qui donne $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ou $\frac{dy}{dx} - \frac{x}{y}$.

$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$, $x\,dx + y\,dy = 0$. En intégrant il vient :
$y = cx$, $x^2 + y^2 = C'$ ces équations sont les projections des deux lignes de courbure et si l'on se rappelle que les surfaces de révolution représentées par l'équation générale
$z = \Phi(x^2+y^2)$, on voit immédiatement que ces lignes de courbure ne sont autre chose que les méridiens et les parallèles.



Ce résultat pouvait être prévu à priori car dans une surface de révolution ; les normales à la méridienne sont les normales à la surface et elles engendrent une surface développable qui dans ce cas est le plan même de cette courbe.

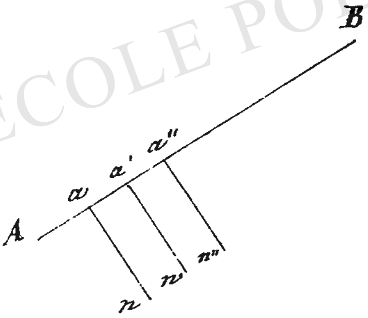
De même les normales tout le long du parallèle vont se conjuguer en un même point de l'axe ; elles engendrent donc une surface développable qui dans ce cas est un cône.

Cette application est remarquable en ce qu'elle offre le seul exemple d'une surface dans laquelle une ligne de courbure (la méridienne) est en même temps section principale ; il n'en serait p.as de même pour le parallèle car cette courbe n'est pas normale à la surface.

Il existe encore plusieurs autres surfaces pour lesquelles on peut déterminer à priori les lignes de courbure par de simples considérations géométriques.

1° Surfaces développables. Leur propriété caractéristique qui sert à les distinguer des autres surfaces réglées est que leur plan tangent est le même tout le long d'une génératrice.

Cette propriété montre immédiatement quelles sont les lignes de courbure; ce sont les génératrices. Pour que cela soit, il faut si l'on imagine que la droite AB est une génératrice de la surface que les normales à la surface menées par les différents points de cette droite forment une surface développable.



Or, puisque le long de AB le plan tangent est le même, les normales à la surface en tous les points de cette droite sont parallèles entre elles et leur ensemble forme un plan, c'est-à-dire, la plus simple des surfaces développables.

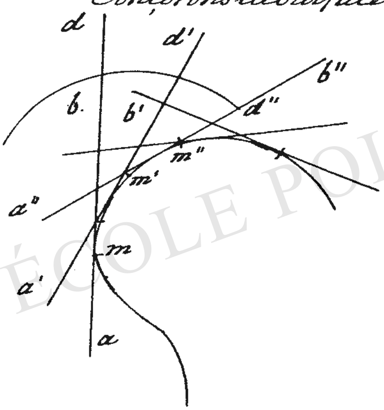
On pourrait objecter que ces normales ne satisfont pas à la condition que deux normales infiniment voisines aillent se rencontrer; mais on remarquera que la condition analytique que l'on a établie entre ces deux normales pour la détermination des lignes de courbure de même satisfait car cette relation $\frac{dp}{p\,dz+dx}=\frac{dq}{q\,dz+dy}$ est satisfaite pour tous les points de la génératrice puisque le plan tangent étant le même p et q demeurent constants pour tous ces points; il en résulte $dp=0$ et $dq=0$, qui satisfont à la condition précédente; d'ailleurs elle ne fait qu'exprimer que ces droites se trouvent dans un même plan.

Il résulte de l'autre système de lignes de courbure de cette surface sera l'ensemble des lignes qui coupent les génératrices à angle droit. Elles se trouvent par la suf-

-fisamment déterminées pour quelques surfaces dévelop-pables particulières. Ainsi pour les cylindres ce seront les sections droites, et pour les cônes ce seront les intersections des génératrices avec une série de sphères concentriques ayant leur centre au sommet du cône, car il est évident que de pareilles courbes coupent les génératrices à angle droit.

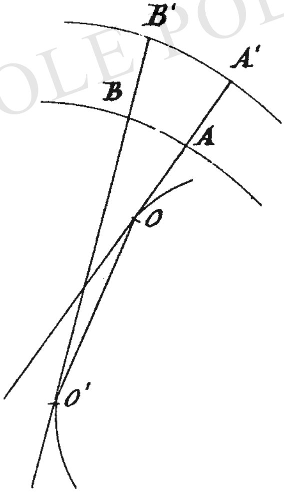
Il n'est pas possible de définir avec autant de précision la position de l'autre système de lignes de courbure sur une surface développable quelconque; néanmoins on peut en indiquer une propriété importante.

Concevons la surface développée sur un de ses plans tangents, ses génératrices se développent suivant des lignes droites ab, $a'b'$, $a''b''$... etc tangentes à une courbe m, m', m''... qui ne sera autre chose que le développement de l'arête de rebroussement de cette surface.



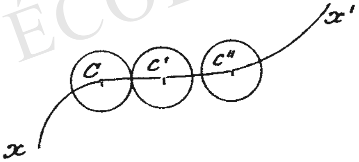
Comme d'ailleurs les angles que les courbes de l'autre système de lignes de courbure forment avec les génératrices n'ont pas changé dans le développement, il s'ensuit que les lignes de courbures seront encore représentées sur ce développement par les trajectoires orthogonales telles que $d\,d'\,d''$... de ces droites ab, $a'b'$, $a''b''$. .... Ce seront donc les développantes d'une même développée m, m', m''. . . ce sont ce qu'on peut appeler des courbes parallèles, c'est-à-dire, que l'une d'entre elles étant déterminée, les autres s'en déduiront en portant sur chaque normale une longueur constante.

En effet, supposons que deux courbes AB et $A'B'$ soient les développantes d'une même courbe OO' on aura d'après les propriétés connues de la développée les relations: $OO' = BO' - AO = B'O' - A'O$ on en déduit : $A'O - AO = B'O' - BO'$ ou $AA' = BB'$ ce qui indique bien que la courbe AB est parallèle à la courbe $A'B'$.

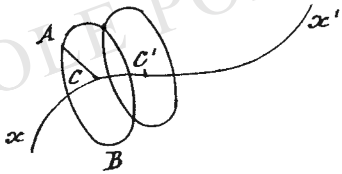


<u>Surfaces</u> <u>canaux</u>. Ces surfaces sont les enveloppes des positions d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une courbe donnée.

L'enveloppe d'une surface mobile comme celle d'une courbe mobile est l'enveloppe des intersections successives de la surface enveloppée. Dans ce cas comme la limite de l'intersection de deux positions infiniment voisines de la sphère C est évidemment un grand cercle de cette sphère normal à l'élément de courbe considéré, on en conclut que l'on pourra considérer la surface comme engendrée par un cercle de rayon constant dont le centre parcourt la courbe $x\,x$ et dont le plan demeure normal à cette courbe.

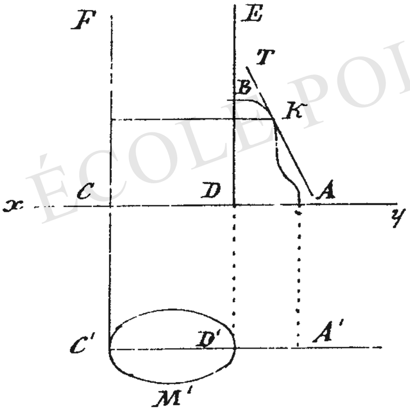


Or, les lignes de courbure sont précisément ces cercles. En effet, considérons un de ces cercles la normale à la surface canal au point C sera CA car CA est normale à la sphère dont le centre est en C et comme la circonférence



CAB est la courbe de contact de la surface de cette sphère et deux surfaces ont les mêmes normales tout le long de la courbe CAB. Ces normales formeront donc une surface développable qui sera le plan de ce cercle et d'ailleurs toutes ces normales iront rigoureusement concourir au point C. Les lignes de courbure de l'autre système sont les trajectoires orthogonales de ces différents cercles.

Moulures. Considérons enfin une classe de surfaces



engendrées par une courbe quelconque BKA dont le plan passe constamment par une des génératrices des cylindres droits CDEF en même temps que sa projection D'A' demeure constamment normale à la directrice D'M'C' de ce cylindre.

Les lignes de courbure sont les différentes positions de la courbe BKA et les sections horizontales. Pour le démontrer nous allons d'abord déterminer quelle est en un point K de cette courbe la normale à la surface; le plan tangent à la surface au point K est le plan vertical mené suivant KT puisque c'est le plan mené par la tangente KT, et la tangente à la section horizontale qui est la verticale projetée en K car il résulte du mode même de la généra-

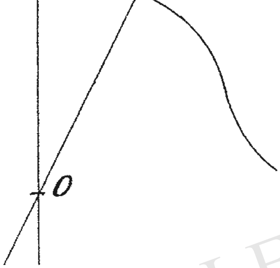
-ration de la surface que toutes les sections horizontales sont des courbes parallèles à la directrice C'M'D', les normales à la surface le long de la courbe BKA seront donc les normales de cette courbe et elles engendreront encore une surface développable qui sera le plan même de cette courbe.

Les sections horizontales constitueront l'autre série de lignes de courbures car il résulte de ce que la tangente à la section horizontale est projetée au point K que cette tangente est perpendiculaire à KT et par suite que cette section horizontale coupe à angle droit la courbe BKA.

D'ailleurs il résulte de la définition même de la surface que le raisonnement s'applique à tous les points de la surface car il ne dépend en rien du plan vertical que l'on a pris pour plan de projection.

Calcul des longueurs des rayons de courbure d'une surface en un point quelconque.

Nous avons admis qu'en négligeant les infiniment petits du second ordre, les normales à la surface en deux points infiniment voisins de la ligne de courbure vont se rencontrer. Il en résulte que le rayon de courbure en un point quelconque sera égal à la partie de la normale en ce point interceptée entre la courbe et le point d'intersection avec la normale voisine.



Les équations de la normale aux points A et B seront :

$$\begin{cases} x-x'+p\,(z-z')=0 \\ y-y'+q\,(z-z')=0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} x-x'-dx'+(p+dp)(z-z'-dz')=0 \\ y-y'-dy'+(q+dq)(z-z'-dz')=0. \end{cases}$$

En combinant ces équations identi-

-quement de la même manière que dans la leçon précédente et remplaçant encore dz, dp, dq par leurs expressions, il vient:

$$dx'(1+p^2)+pq\,dy'=(z-z')(r\,dx'+s\,dy')$$
$$dy'(1+q^2)+pq\,dx'=(z-z')(s\,dx'+t\,dy')$$

ou en ordonnant par rapport à dx' et dy'

$$dx'\left[1+p^2-r(z-z')\right]+dy'\left[pq-s(z-z')\right]=0$$
$$dx'\left[pq-s(z-z')\right]+dy'\left[1+q^2-t(z-z')\right]=0.$$

Si on égale les deux valeurs de $\frac{dy'}{dx'}$ tirées de ces deux relations, on aura $z-z'$ en fonction de p, q, r, s, t qu'on peut regarder comme connues en un point de la surface. Il vient donc:

$$\frac{1+p^2-r(z-z')}{s(z-z')-pq}=\frac{pq-s(z-z')}{t(z-z')-(1+q^2)}$$

ou chassant les dénominateurs:

$$(z-z')^2(rt-s^2)+(z-z')\left[2pqs-t(1+p^2)-r(1+q^2)\right]+1+p^2+q^2=0.$$

Or, on a $R^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$ on en déduit

$$z-z'=\frac{R}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \quad (2)$$

et en substituant cette valeur dans la relation précédente il vient:

$$R^2(rt-s^2)+R\sqrt{1+p^2+q^2}\left[2pqs-t(1+p^2)-r(1+q^2)\right]+(1+p^2+q^2)^2=0 \quad (1).$$

Cette équation du second degré servira à déterminer les deux rayons de courbure; et de plus le signe de ses racines indiquera si le rayon de courbure situé en dessus ou au dessus du plan tangent car la relation (2) indique bien que $z-z'$ sera toujours du même signe que R.

Nous pourrons faire quelques vérifications sur (1); car si l'on prend pour origine le point A et pour plan des xz et des yz les plans des sections principales on aura :
$p=0$, $q=0$, $s=0$ et (1) se réduit à

$$R^2 - R\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{rt}=0 \quad (2)$$

équation qui donne bien les rayons de courbure principaux.

S'il arrivait que pour tous les points de la surface on eut identiquement $rt-s^2=0$. l'équation (1) aurait une racine infinie, c'est le cas des surfaces développables qui ont pour lignes de courbure leurs génératrices car en deux points infiniment voisins de la même génératrice les deux normales à la surface sont parallèles.

On peut d'ailleurs démontrer que cette relation est exclusive aux surfaces développables.

Car la relation $rt-s^2=0$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{dp}{dx}\cdot\frac{dq}{dy}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dq}{dx} \text{ d'où :}$$

$$\frac{\frac{dq}{dy}}{\frac{dp}{dy}}=\frac{\frac{dq}{dx}}{\frac{dp}{dx}}=M \text{ on en déduira donc}$$

$$\frac{dq}{dy}=M\frac{dp}{dy} \text{ et } \frac{dq}{dx}=M\frac{dp}{dx} \text{ d'où.}$$

$$\frac{dq}{dx}dx+\frac{dq}{dy}dy=M\left[\frac{dp}{dx}dx+\frac{dp}{dy}dy\right]$$

ou $dq = M\,dp$

Or, cette relation exige que q soit fonction de p, car si l'on donne $dp=0$, dq sera aussi nul et p et q auront en même

temps des valeurs constantes; d'ailleurs on ne pourra pas donner à p une valeur finie et déterminée sans donner à q une valeur finie et déterminée : on aura donc nécessairement $p = f(q)$.

Par conséquent, la surface est l'enveloppe des positions d'un plan mobile ne variant qu'en vertu d'un seul paramètre arbitraire. Les positions successives qu'il prendra pour des valeurs très voisines de ce paramètre, se couperont consécutivement suivant des droites qui, deux à deux, se trouveront évidemment dans un même plan : ces droites formeront donc ainsi une surface développable, touchée par tous les plans individuels, et qui sera leur enveloppe ; car elle aura avec chacun d'eux un élément superficiel commun.

On peut montrer analytiquement que la relation (1) $q = \Phi(p)$ est exclusive aux surfaces développables. Pour le montrer, nous allons ramener cette équation aux différentielles partielles à la seule forme d'équations de cette nature que nous ayons appris à intégrer, c'est-à-dire, à une équation différentielle de la forme $Pp + Qq = R$.

En différentiant (1) par rapport à x il vient :

$$\frac{dq}{dx} = \Phi'(p)\frac{dp}{dx} \text{ et comme } \frac{dq}{dx} = \frac{dp}{dy}.$$

(2). $\frac{dp}{dy} - \Phi'(p)\frac{dp}{dx} = 0$. Équation qui n'est qu'un cas particulier de la classe d'équations précédemment citée et dans laquelle p est la variable principale. Pour l'intégrer, il faudra comme on sait traiter le système d'équations simultanées $\frac{dx}{-\Phi'(p)} = \frac{dy}{1} = \frac{dp}{0}$, ce qui donne $dp = 0$ et $dx + \Phi'(p)\,dy = 0$ en intégrant on a $p = \alpha$ et $x + \Phi'(p)\,y = \beta$.

et l'intégrale générale de (2) sera :
(3) $x+y\,\Phi'(p)-\Psi(p)=0$ ($\Psi(p)$ étant une fonction arbitraire)

La marche qu'il serait naturel de suivre serait de tirer la valeur p de (3) on en conclurait q au moyen de la relation $q=\Phi(p)$, et connaissant p et q il suffirait d'intégrer l'équation $dz=p\,dx+q\,dy$ pour avoir l'équation de la surface. Mais ce procédé n'est pas réalisable, car il entre dans les relations deux fonctions arbitraires que l'on ne peut pas particulariser.

On aura alors recours à l'artifice suivant :

En remarquant que $\Phi'(p)=\dfrac{dp}{dq}$ (3) devient :

$x\,dp+y\,dq-\Psi(p)\,dp=0$, puis comme la somme de ces trois termes est nulle on pourra sans inconvénient poser :

$$dz=p\,dx+q\,dy+x\,dp+y\,dq-\Psi(p)\,dp$$

la somme des quatre premiers termes représente la différentielle exacte de $px+qy$, de sorte qu'en intégrant on aura : $z=px+qy-\int\Psi p\,dp$, ou en remplaçant q par sa valeur et désignant :

$$\int\Psi(p)\,dp \text{ par } F(p),\ z=px+\Phi(p)\,y-F(p) \quad (4).$$

En éliminant p entre (3) et (4) on devra avoir l'équation de la surface cherchée.

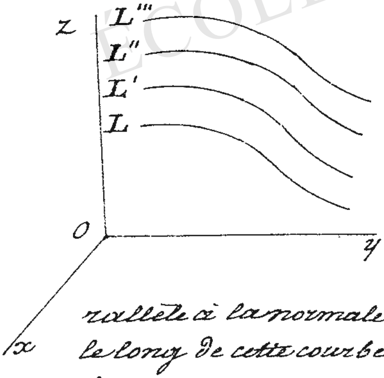
Or, on va voir que c'est nécessairement une surface développable. Car (4) est linéaire par rapport à x, y, z, on peut donc la considérer comme représentant un plan mobile qui varie de position avec la valeur arbitraire d'un paramètre p ; d'ailleurs si l'on voulait chercher l'enveloppe des positions de ce plan mobile, il faudrait, d'après ce que l'on a vu, éliminer le paramètre p entre (4) et sa dérivée par rapport à ce paramètre ; il arrivera justement que

(3) est la relation que l'on obtiendrait de cette manière de sorte que l'on voit bien que la surface cherchée n'est autre que l'enveloppe des positions d'un plan mobile et que par conséquent c'est une surface développable qui a pour génératrices les intersections de chaque position de ce plan avec la position infiniment voisine.

Du reste, on pourrait par des considérations géométriques fort simples faire voir que les surfaces qui jouissent de la propriété d'avoir en chacun de leurs points un rayon de courbure infini sont des surfaces développables.

D'abord il est évident que les surfaces développables satisfont à cette condition puisqu'en chacun de leurs points il passe une ligne de courbure qui est une génératrice, mais il faut montrer qu'elles seules y satisfont.

Supposons donc que L, L', L''... soient les lignes de courbure de la surface qui correspondent à ces rayons infinis.



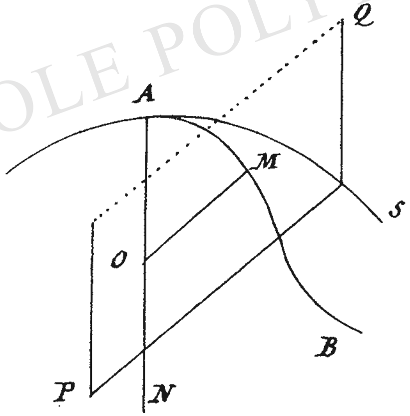
Par hypothèse, il faut qu'en menant par deux points infiniment voisins de la courbe L, par exemple, des normales à la surface, elles soient parallèles ; d'ailleurs puisque chacune des normales menée par les points de la courbe L doit être parallèle à la normale infiniment voisine, toutes les normales le long de cette courbe seront parallèles, il en résulte que tous les plans tangents à la surface le long de cette courbe seront parallèles et même il est nécessaire que ce plan tangent soit le même pour tous les points de la courbe L ; car si nous prenons pour plan des xy un plan parallèle à la direction

commune de tous ces plans, on devra avoir pour chacun de ces points $p=0$, $q=0$ et la relation $dz = p\,dx + q\,dy$ donne $dz=0$ d'où $z = C$; tous ces points sont donc à la même hauteur et les plans parallèles au plan des xy par chacun de ses points ne forment qu'un seul et même plan.

Ce point établi, la surface sera touchée par un seul plan tout le long des courbes L, L', L'', elle sera l'enveloppe des positions successives de ce plan et par conséquent ce sera une surface développable ; d'après ce que nous venons de dire les lignes de courbure seront les intersections successives de ce plan avec la position infiniment voisine, ce seront donc des lignes droites.

Nous nous sommes appuyés pour la détermination de la longueur des rayons de courbure sur la propriété de la courbe aux normales d'être tangente aux sections principales (Nous conviendrons pour simplifier le langage d'appeler courbe aux normales la courbe tracée sur la surface qui est telle que toutes les normales à la surface menées par chacun de ses points aillent rencontrer une normale quelconque prise pour point de départ). De simples considérations géométriques peuvent établir cette propriété ; mais auparavant nous indiquerons le moyen de construire cette courbe aux normales.

Les courbes aux normales sont les lignes de contact de la surface donnée avec une surface de révolution inscrite ou circonscrite ayant pour axe de rotation la normale au point de départ. En effet, quand deux surfaces sont inscrites l'une à l'autre, le plan tangent est le même pour tous les points de la ligne de contact, la normale en un point M de cette ligne de contact sera donc la même,



elle devra rencontrer l'axe et par conséquent cette courbe AMB devra être la courbe aux normales.

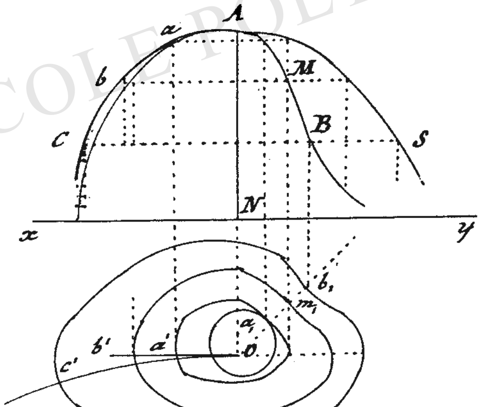
Réciproquement, la courbe aux normales AMB en tournant autour de l'axe AN engendrera une surface de révolution qui sera inscrite ou circonscrite à la surface donnée.

Pour le faire voir il suffit de montrer qu'en un point quelconque M la surface S et la surface de révolution auront la même normale.

Or, la normale à la surface donnée devra nécessairement se trouver dans le plan PQ normal à la courbe AMB et comme par hypothèse, elle doit rencontrer l'axe AN elle passera nécessairement par le point O où le plan PQ coupe cet axe. D'ailleurs, si l'on cherchait la normale à la surface de révolution on aurait à faire exactement la même chose; donc ces deux normales coïncident et la surface de révolution est inscrite ou circonscrite à la surface donnée.

Cela étant, voici comment on construira la courbe aux normales AMB la surface S étant donnée.

Prenons pour plan des xy un plan quelconque perpendiculaire à AN et coupons la surface S par des plans longitudinaux a, b, c, les sections faites par ces plans seront en projections horizontales les courbes a', b', c'; on aura la projection horizontale $a_1\ m_1\ b_1$ de la ligne aux



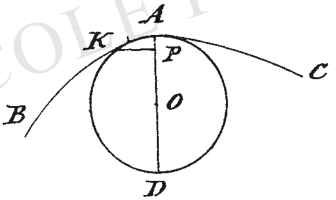
normales A M B cherchée en joignant par une ligne continue les points de ces sections horizontales les plus rapprochés du point O.

En effet, le point M de la courbe A M B, décrira dans la révolution de cette courbe autour de l'axe A N un parallèle projeté horizontalement suivant le cercle dont le rayon est O a_1, et comme par hypothèse O a_1 est le plus petit des rayons vecteurs de la section a' a_1 ce cercle lui sera complètement intérieur sauf au point a_1 et la surface de révolution sera tangente à la surface donnée au point de l'espace projeté en a_1. Il en sera de même pour tout autre point de la courbe a_1 m_1 b_1 qui sera alors la courbe aux normales car ce sera la ligne de contact de la surface donnée avec une surface de révolution ayant A N' pour axe.

Il est aisé de voir que si l'on joignait les points a', b', c' les plus éloignés de l'axe, on aurait la projection horizontale d'une autre courbe aux normales ; seulement dans ce cas la surface de révolution serait circonscrite à la surface donnée.

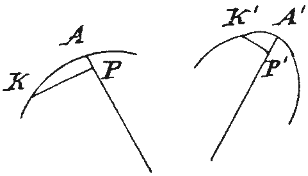
Rappelons maintenant que si l'on considère une courbe plane comme coïncidant dans un élément infi-

-nimens petit AK avec son cercle osculateur AO on a $\overline{KP}^2 = AP(2R - AP)$ ou en négligeant les infinimens petits du second ordre

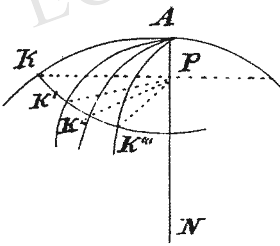


$\overline{KP}^2 = AP.2R$ d'où

$R = \dfrac{\overline{KP}^2}{2AP}$; il en résulte que si l'on veut comparer les courbures de deux courbes planes quelconques en deux points A et A' il suffira de prendre sur les normales à ces courbes des quantités AP, A'P' très petites et égales, et la comparaison des longueurs KP, K'P' suffira.

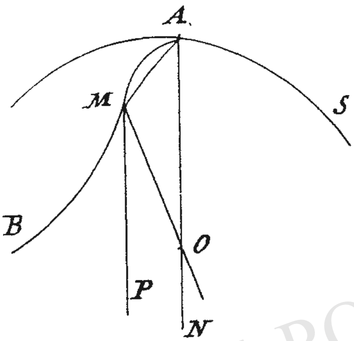


Revenons maintenant à la surface S et par la normale AN faisons passer les différentes sections normales, les intersections KP, K'P' de la section horizontale KP avec ces différentes sections normales serviront bien d'après ce que nous venons de dire à mesurer leurs courbures. La plus petite indiquera la section normale qui a le rayon de courbure le plus petit, et comme d'ailleurs le point correspondant est situé sur la courbe a, m, b, considérée précédemment il en résulte que cette courbe aux normales est tangente à la section principale correspondante.



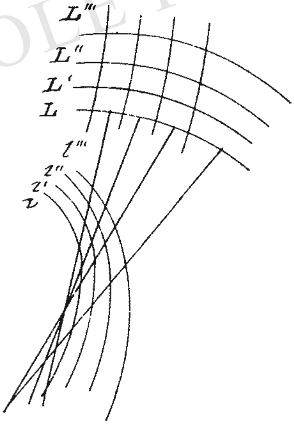
Le même raisonnement pourrait se faire pour le rayon vecteur le plus grand, de telle sorte que l'on peut regarder comme démontré que les deux branches de la courbe aux normales sont tangentes aux sections principales au point A.

On pourra alors montrer que pour avoir le centre de courbure de la ligne de courbure il suffit de chercher le point de rencontre de deux normales infiniment voisines de la surface.



Car si l'on considère la courbe aux normales AMB et que par un point M de cette courbe et l'axe on fasse passer une section normale quelconque AMP, la normale à la surface au point M ira rencontrer l'axe AN et ce sera la normale à la courbe AMP; par conséquent si l'on imagine que le point M se rapproche indéfiniment du point A la section normale AMP deviendra tangente à la courbe AMB et par suite sera la section principale d'ailleurs la normale Mo à la surface sera toujours en leur point commun normale à la courbe AMP: Un point de rencontre avec AN deviendra donc le centre de courbure de la section principale ou de la ligne de courbure en ce point qui par définition a un élément de commun avec elle.

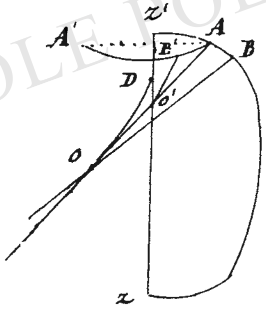
Soient L, L' L'', L''' etc. les lignes de courbure d'un même système; les normales à la surface par tous les points de la courbe L, par exemple formant une surface développable dont l'arête de rebroussement sera la courbe l; on obtiendra de même des arêtes de rebroussement l', l'', l''' etc correspondant aux autres lignes de courbure L', L'', L''' ... etc; cette série de ces nouvelles courbes formera une seconde surface qui sera le lieu des centres de courbure principaux : chaque normale de la surface considérée sera tangente à cette nouvelle surface puisqu'elle est tangente à une courbe qui y est tracée; de plus il y aura deux surfaces de ce genre, puisqu'il y a deux systèmes différents de lignes de courbure.



Enfin la construction de ces surfaces sera fort simple, car il suffira de porter sur chaque normale à la surface considérée une longueur égale au rayon de courbure pour obtenir le point correspondant.

La longueur des rayons de courbure aux différents points d'une surface peut dans certains cas particuliers être déterminée immédiatement par des considérations géométriques fort simples.

Surfaces de révolution. Nous savons que les méridiens forment un premier système de lignes de courbure. Le rayon de courbure au point A sera d'après ce que nous avons vu, la portion de normale AO comprise entre la surface et le point O de rencontre avec la normale à la surface en un

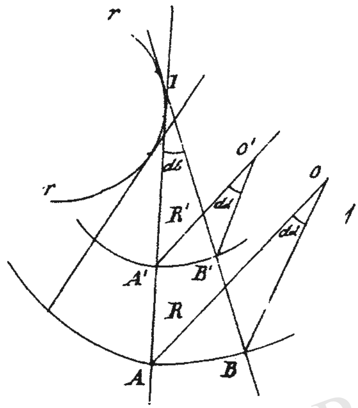


point B de la ligne de courbure infiniment voisine du point A.

Les normales à la surface tout le long de la méridienne seront toutes tangentes à une courbe DO qui en est la développée; puisque la courbe Z'AB tournera autour de l'axe ZZ pour engendrer la surface de révolution donnée, la courbe DO engendrera une autre surface de révolution qui sera évidemment l'une des surfaces (lieu des centres de courbure) dont nous avons parlé précédemment.

D'ailleurs l'autre rayon de courbure sera AO' car les normales à la surface tout le long ~~de l'autre~~ de l'autre ligne de courbure (qui est ici la parallèle AA') vont toutes concourir au point O'. Enfin l'autre lieu des centres de courbure se réduira pour ce système à une ligne droite qui est l'axe ZZ' lui-même.

<u>Surfaces</u> <u>développables</u>. Pour de pareilles surfaces il n'y a ~~se~~ à chaque point qu'un seul rayon de courbure à déterminer. Les lignes de courbure sont d'une part les génératrices rectilignes ~~et~~ de l'autre les trajectoires orthogonales AB, A'B'... de ces génératrices. Si AO et BO sont deux normales à la surface par deux points infiniment voisins de la courbe AB, AO sera le rayon de courbure qu'il s'agit de déterminer. Exa-



-minons comment il varie pour deux points différents de la même génératrice AB. Pour le point A' ce sera A'O' obtenu de la même manière que précédemment.

Cela posé, on peut trouver entre A'O' et AO une relation fort simple. Car, les angles AOB et A'O'B' sont rigoureusement égaux comme formés par des droites parallèles et en désignant par ds leur valeur commune, on aura en considérant les arcs infiniment petits AB, A'B' comme de petits arcs de cercle $AB = R\,ds$, $A'B' = R'\,ds$. On en tire
$\frac{R}{R'} = \frac{AB}{A'B'}$ ou $R = \frac{AB}{A'B'} R$, $R = \frac{IA}{IA'} R' = \frac{l}{l'} R'$ (en désignant par l et l' les distances des points A et A' à l'arête de rebroussement $r\,i\,r'$) de sorte que si l'on prend un point fixe pour point de départ (le point situé à l'unité de distance par exemple) le facteur $\frac{R'}{l'}$ sera égal à une constante m déterminée par ce fait même et l'on aura pour tous les points de la génératrice la relation $R = ml$.

Cette relation indique que plus on s'approche de l'arête de rebroussement, plus R diminue et par suite plus la courbure de la surface augmente: et lorsque $l = 0$ la courbure devient infinie. C'est ce qui explique pourquoi la surface est comme brisée le long de l'arête de rebroussement. On en a un exemple frappant dans le cône; sur les parallèles très éloignés du sommet la différence de courbure entre deux points infiniment voisins est insensible, tandis que près du sommet elle est très prononcée.

On pourrait donner à cette quantité $m = \frac{R'}{l'}$ une signification; car si l'on prend $l' = 1$ on a $m = R'$ c'est-à-dire, que c'est le rayon de courbure à l'unité de distance. Or, ce

rayon de courbure $m = \frac{A'B'}{d\lambda} = \frac{d\varepsilon}{d\lambda}$ (puisque par hypothèse, $A'B'$ est pris égal à l'unité).

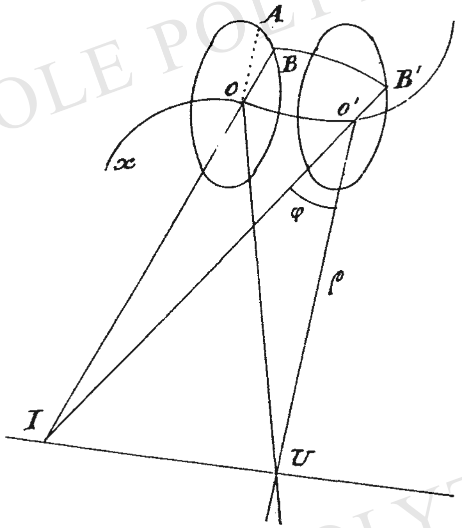
Cette expression prendra une signification assez remarquable; si on divise les deux termes par le petit arc ds de l'arête de rebroussement compris entre les deux points de contact des génératrices AB, $A'B'$.

$m = \frac{\frac{d\varepsilon}{ds}}{\frac{d\lambda}{ds}}$ or $\frac{d\varepsilon}{ds}$ c'est la courbe $\frac{1}{\rho}$ de l'arête de rebroussement; $d\lambda$ c'est l'angle de deux normales infiniment voisines de la surface développable, où l'angle de deux plans tangents infiniment voisins, et comme ces plans tangents ne sont autre chose que les plans osculateurs de l'arête de rebroussement $\frac{d\lambda}{ds}$ sera égale à ce que l'on appelle la seconde courbure de l'arête de rebroussement de sorte que l'on aura :

$m = \frac{\frac{1}{\rho}}{\frac{1}{\rho}} = \frac{\rho_1}{\rho}$. Si $\rho = \infty$ comme $\frac{1}{\rho_1} = \frac{d\lambda}{ds}$ on en conclura $\delta\lambda = 0$, par conséquent l'arête de rebroussement sera plane et par suite la surface développable le sera aussi. D'ailleurs la relation $R = m\ell$ donne $R = \infty$ ce que l'on devait trouver car la courbure d'un plan est nulle.

<u>Surfaces</u> <u>canaux</u>.

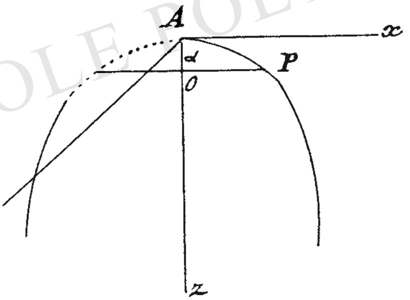
L'un des systèmes de ligne de courbure étant les positions successives du cercle O, il est évident que le rayon de courbure correspondant à ces sections sera constant et égal à BO, car pour un point infiniment voisin de la surface sur ce cercle, la normale AO ira rigoureusement concourir au point O.



Quant au second rayon de courbure ce sera IA. Pour examiner cette longueur nous remarquerons que les deux droites BO, B'O' sont situées l'une dans le plan du cercle O, l'autre dans le plan du cercle O'; elles devront donc se couper en un point de l'axe du cercle osculateur de la courbe xx' de telle sorte que si l'on mène les deux rayons de courbure OU, O'U de cette courbe la droite IU sera perpendiculaire au plan OUO'. Cela posé, dans le triangle O'IU on a $O'I = \frac{\rho}{\cos.\varphi}$ et par conséquent $B'I = r + \frac{\rho}{\cos.\varphi}$. On voit d'après cette formule que si l'on considère les différents points d'un même cercle, ce rayon de courbure variera autour du point O depuis $r + \rho$ jusqu'à ∞ c'est-à-dire qu'il y aura toujours un point pour lequel le rayon de courbure sera infini et ce point correspondra à la valeur de $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

<u>Indicatrices</u>. On appelle indicatrice une section infiniment voisine du point A et perpendiculaire à la normale Az' de la surface.

Nous allons faire voir que quelle que soit la surface donnée, elle peut être considérée comme une section conique, c'est-à-dire que plus son plan OP s'approche du



plan tangent xAy (auquel cas elle tend de plus en plus à se réduire à un point) plus les courbes de dimensions finies qui lui seraient semblables, s'approcheraient de devenir des sections conjuguées. Il y aura des exceptions, mais ce ne sera que dans des cas très particuliers que nous n'examinerons pas.

Prenons donc pour constater cette propriété le plan tangent pour plan des xy, et dirigeons les axes des x et des y suivant les tangentes aux sections principales.

L'équation de la surface étant $z = \Phi(x, y)$ l'équation de la section par un plan $z = \alpha$ sera $\alpha = \Phi(x, y)$. La fonction Φ est une fonction quelconque, cependant le choix des axes nous indique que pour ce point A on a $p_0 = 0$, $q_0 = 0$ et $s_0 = 0$ de telle sorte que si l'on développe $\Phi(x, y)$ par la série de Maclaurin on aura.

$$(1)\quad \alpha = \frac{1}{1\cdot 2}\left[r_0 x^2 + t_0 y^2\right] + R'$$ (renfermant des termes en x et y de degrés supérieurs au 2^e).

Cette courbe a des dimensions infiniment petites et ces dimensions diminuent indéfiniment, une courbe de dimensions finies qui lui serait semblable s'approchera de plus en plus de devenir une section conique.

Or, l'équation d'une courbe semblable peut se mettre sous la forme (en désignant par m le coefficient de similitude) :

$$\alpha = \frac{1}{1.2} r_0 \frac{x^2}{m^2} + \frac{1}{1.2} t_0 \frac{y^2}{m^2} + \frac{R_1}{m^3}$$

ou en multipliant par m^2:

$$m^2 \alpha = \frac{1}{2} r_0 x^2 + \frac{1}{2} t_0 y^2 + \frac{R_1}{m} \quad (2).$$

Cherchons la relation qui doit exister entre m et α pour que cette courbe semblable ait des dimensions finies. On sait que $\frac{\overline{OP}^2}{\alpha}$ a pour limite finie $2R$ (le diamètre du cercle osculateur) on en tire $OP \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{2R}$. On voit donc que si l'on multiplie OP par une quantité de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ il prendra une valeur finie de sorte que si l'on prend $m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ la courbe semblable aura ses dimensions finies.

Cette hypothèse introduite dans (2) donne:

$1 = \frac{1}{2} r_0 x^2 + \frac{1}{2} t_0 y^2 + R_1 \sqrt{\alpha}$: il est évident que si α tend vers zéro de sorte qu'à la limite la courbe a pour équation:

$1 = \frac{1}{2} r_0 x^2 + \frac{1}{2} t_0 y^2$ qui est bien l'équation d'une section conique.

Ayant démontré que l'indicatrice est semblable à une section conique, on en déduit facilement l'équation de cette indicatrice, ce sera évidemment:

$$1 = \frac{1}{2} r_0 \left(\frac{x}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 + \frac{1}{2} t_0 \left(\frac{y}{\sqrt{\alpha}}\right)^2 \text{ ou } \alpha = \frac{r_0 x^2}{2} + \frac{t_0 y^2}{2} \quad (3)$$

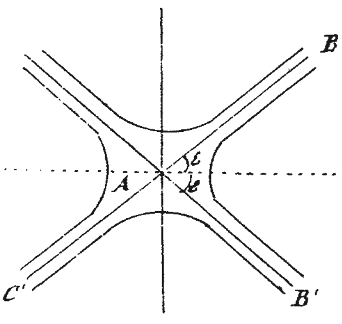
Nous avons supposé que l'indicatrice était au dessus du plan tangent: si elle était au dessous son équation serait évidemment de la forme (4) $\alpha = \frac{r_0 x^2}{2} + \frac{t_0 y^2}{2}$.

Si l'indicatrice est une ellipse, r_0 et t_0 seront de même signe et il est manifeste qu'il n'y aura qu'une indicatrice, située au dessous ou au dessus du plan tangent car si (3) représente une courbe réelle (4) représentera une courbe imaginaire et réciproquement. Il en résulte que la surface est toute entière située de l'un ou de l'autre côté du plan tangent, ce que l'on pouvait prévoir à priori car dans le cas où r_0 et t_0 sont de même signe on sait que les rayons de courbure sont aussi de mêmes signes puisque leurs valeurs sont égales à $\frac{1}{r_0}$ et $\frac{1}{t_0}$.

Au contraire, dans le cas où r_0 et t_0 seraient de signes contraires, l'indicatrice deviendrait une hyperbole. Dans ce cas il pourrait y avoir deux indicatrices dont les équations seront de la forme : $\alpha = Ax^2 - By^2$; $-\alpha = Ax^2 - By^2$

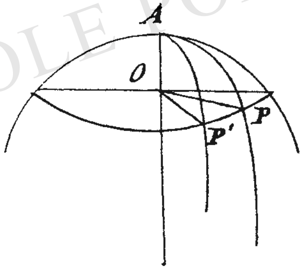
où $\begin{cases} \alpha = Ax^2 - By^2 \\ \alpha = By^2 - Ax^2 \end{cases}$ qui représentent ordinairement les équations de deux hyperboles conjuguées.

On conçoit, en effet, que dans ce cas où r_0 et t_0 sont de signes contraires (auquel cas la surface est au dessus de son plan tangent dans une plage et au dessous dans la plage supplémentaire, comme nous l'avons fait voir dans une des précédentes leçons) il y aurait deux indicatrices l'une qui coupe la surface au dessus l'autre au dessous du plan tangent.



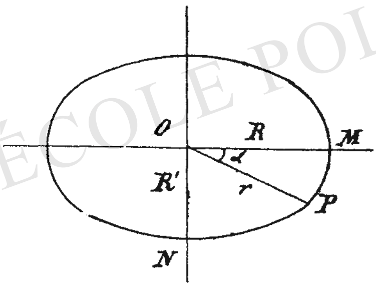
L'utilité de l'indicatrice est d'indiquer très clairement comment les courbures des sections normales en un point donné.

En désignant par R et R' les rayons de courbure des deux sections normales AOP, AOP' on aura à la limite



$$2R = \frac{\overline{OP}^2}{OA},\quad 2R' = \frac{\overline{OP'}^2}{OA}.$$

il en résulte $\frac{R}{R'} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OP'}^2}$. Par conséquent le plus grand et le plus petit rayon de courbure correspondront au plus grand et au plus petit rayon vecteur de l'indicatrice ou du moins de la courbe semblable. De plus si l'on construit une section conique semblable ayant pour axe des droites OM et ON telle qu'on ait: $\overline{OM}^2 = R$, $\overline{ON}^2 = R'$ chaque diamètre de cette courbe élevé au carré représentera numériquement le rayon de courbure de la section normale correspondante.



Or, pour une section quelconque OP on aura: $\frac{r}{R} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OM}^2}$. d'où $r = \overline{OP}^2$ puisque $R = \overline{OM}^2$.

Cela permet d'ailleurs de retrouver la formule d'Euler; car dans une section conique on sait qu'il existe entre un diamètre quelconque et les axes les relations:

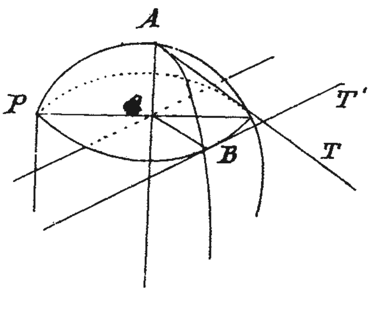
$$a'^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha} \text{ d'où}$$

$$\frac{1}{a'^2} = \frac{1}{a^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{b^2}\sin^2\alpha \text{ d'où } \frac{1}{r} = \frac{1}{R}\cos^2\alpha + \frac{1}{R'}\sin^2\alpha.$$

Cette formule parait présenter quelques difficultés dans le cas où l'indicatrice est une hyperbole, parceque ne rencontrant pas toutes ces sections normales elle ne parait pas propre à donner tous leurs rayons de courbure ; mais on remarquera qu'il suffit de connaître une indicatrice si l'on se rappelle que l'hyperbole conjuguée est le lieu géométrique des extrémités des diamètres imaginaires de l'hyperbole réelle. De telle sorte que l'on aura bien tous les rayons vecteurs si l'on convient que les rayons de l'hyperbole conjuguée correspondront aux rayons de courbure situés d'un côté du plan tangent, et ceux de l'autre hyperbole aux rayons des autres nappes.

<u>Tangentes conjuguées</u>. Si on trace une courbe quelconque sur une surface et que par les différents points on mène des plans tangents à la surface on aura une surface développable circonscrite le long de cette courbe. La génératrice de cette surface sera l'intersection de deux de ces plans tangents infiniment voisins et c'est cette génératrice qui est dite la tangente conjuguée de la tangente à la courbe en ce point.

Les tangentes conjuguées sont parallèles à un système de diamètres conjugués de l'indicatrice. En effet, en supposant le point B infiniment voisin du point A le rayon vecteur OB sera évidemment parallèle à la tangente à la courbe AT et le plan tangent au point B passant la droite BT' coupera le plan tangent A qui est parallèle à la section

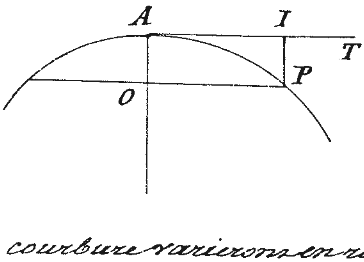


OP suivant une droite parallèle à BT', les tangentes conjuguées seront donc parallèles aux droites OB et BT' et par conséquent seront parallèles à un système de diamètres conjugués.

Si la courbe tracée sur la surface était une ligne de courbure, les intersections successives des plans tangents le long de cette courbe constitueraient une surface développable circonscrite à la surface donnée le long de cette courbe. D'ailleurs puisque les directions des lignes de courbure correspondent aux axes de l'indicatrice, les génératrices de la surface développable seront normales à l'un des systèmes de lignes de courbure et par suite tangentes à celles de l'autre système.

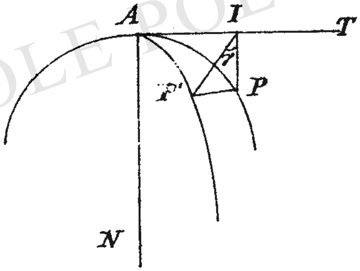
Terminons enfin cette théorie de la courbure des surfaces par une démonstration toute géométrique du Théorème de Meunier.

Et d'abord remarquons que l'on a évidemment pour une courbe plane quelconque :



$$2R = \frac{\overline{OP}^2}{AO} = \frac{\overline{AI}^2}{IP}$$ de sorte que si l'on prend sur les tangentes des courbes dont on veut comparer la courbure une longueur déterminée et égale pour toutes à AI leurs rayons de courbure varieront en raison inverse des longueurs telles que AI.

Cela posé, imaginons une section normale quelconque AP dont AT sera la tangente et menons par AT une section oblique quelconque AP', ces deux courbes



auront évidemment même tangente AT, et l'on aura d'après ce que nous avons vu.
$\frac{R}{R\gamma}=\frac{IP'}{IP}$ d'ailleurs l'angle P sera infiniment peu différent d'une droite si nous supposons le point P rapproché du point A de telle sorte que l'on aura

$\frac{IP'}{IP}=\frac{1}{\cos.\gamma}$ d'où $R\gamma = R\cos.\gamma$; d'ailleurs il est évident par la construction même que l'angle γ mesure l'inclinaison des plans de ces deux sections.

Calcul des Probabilités.

Généralement on entend par probabilité d'un événement son plus ou moins grand degré de vraisemblance. ——— ——— Il semblerait d'après cette définition que la probabilité ne soit pas une quantité que l'on puisse soumettre au calcul ; car en mathématiques on ne peut apprécier que des quantités mesurables. La seule notion précise donnée à priori est celle de l'égalité de deux probabilités. Ainsi si l'on jette en l'air une pièce de monnaie, il paraît manifeste pour quelqu'un qui n'a pas fait une étude spéciale de la pièce qu'il y a autant de probabilité d'amener pile que face. On conçoit de même qu'il y ait autant de chances d'amener une face déterminée dans le jeu d'un dé qui a six faces de tirer une boule blanche dans une urne qui contiendrait cinq noires et une blanche.

On substitue alors à l'énoncé trop vague de la probabilité telle que nous l'avons précédemment définie, une autre définition qui ne lui est pas contradictoire. On appelle <u>probabilité</u> <u>mathématique</u> d'un événement le rapport nombre de cas favorables à son arrivée au nombre de cas, tant favorables que contraires, considérés comme tous également possibles. Ainsi si m est le nombre de cas favorables et n celui de cas contraires, c'est-à-dire, tels qu'ils excluent l'arrivée de l'événement, $m+n$ sera le nombre total de cas également possibles et $\frac{m}{m+n}$ sera la probabilité de l'événement. Cette définition ne s'applique qu'à une certaine classe de phénomènes de probabilité, c'est le tirage des boules d'une urne dans le

cas où toutes les chances sont également probables. D'ailleurs, il en résulte que la probabilité est toujours exprimée par une fraction. Le cas limite serait celui où ses deux termes seraient égaux; alors l'évènement serait certain et l'expression de la certitude sera l'unité. Les fractions comprises entre 0 et 1 déterminent tous les degrés de possibilité depuis l'impossibilité qui correspond à 0 jusqu'à la certitude qui correspond à l'unité.

Toutefois il faudra vérifier que la définition que nous venons de donner n'implique pas contradiction.

Ainsi, il nous faut constater que 1° la vraisemblance d'un évènement est la même quand la probabilité telle qu'elle a été définie a la même valeur. 2° que si les probabilités obtenues sont inégales les chances sont inégales dans le même sens.

Et d'abord, le premier de ces faits sera évident lorsque les fractions qui représentent les probabilités seront identiquement égales; car en admettant pour fixer les idées que cette probabilité soit $\frac{3}{5}$, il est évident que la chance de cet évènement pourra être assimilée au tirage d'une blanche dans deux urnes de compositions identiques.

Dans le cas où ces fractions ne seraient pas identiques, où elles seraient $\frac{3}{5}$ et $\frac{6}{10}$, par exemple. On pourra supposer par la pensée que les dix boules de la seconde urne soient unies 2 à 2 par un fil invisible (deux boules d'une même couleur) sans que le lien qui les unit nuise en rien à leurs mouvements; alors il n'y aura plus réellement que cinq boules qui n'auront

plus la même forme et l'on retombera dans le cas précédent.

Vérifions enfin le second fait sur un exemple, si les probabilités de deux événements sont l'une $\frac{3}{7}$ et l'autre $\frac{5}{9}$ ce dernier sera le plus vraisemblable.

En effet, d'après ce que nous avons vu le premier événement sera aussi vraisemblable qu'un autre dont la probabilité sera $\frac{27}{63}$ et la seconde le sera de même autant qu'un événement de probabilité $\frac{35}{63}$ et ce résultat montre bien que le second est plus probable puisqu'il y a plus de cas favorables avec un nombre total de chances égales pour tous les deux

Néanmoins après ces vérifications on ne doit pas dire que la probabilité soit la mesure de la raison de croire. Car, on ne sait pas ce que c'est que le rapport de deux raisons de croire. Il semble que la probabilité soit toujours un nombre commensurable, cependant, il y a des événements définis dont la probabilité est incommensurable.

Ainsi si l'on demande la probabilité pour que deux surfaces a et b étant tracées par terre, le centre d'une pièce de monnaie tombe en un point de la surface a, la probabilité sera évidemment : $\frac{a}{a+b}$ et ce nombre pourra être incommensurable. Dans ces cas où l'on ne peut compter les chances favorables et les chances défavorables on définit la probabilité par assimilation à un cas où l'on peut les compter : c'est-à-dire que l'on assimilera l'arrivée de l'événement à l'extraction d'une boule de couleur déterminée dans une urne dont on n'a pas pu trouver la

composition.

Il faut bien entendre que lorsqu'on cherchera la probabilité d'un événement, on aura soigneusement ramené tous les cas possibles et tous les cas favorables à un certain nombre de cas tous également possibles et tous également favorables. Ainsi, on commettrait une erreur si en portant la main dans une urne contenant une blanche et trois noires, on pensait avoir autant de chances d'amener une blanche ou une noire, car l'un ou l'autre de ces cas n'est pas également favorable.

C'est par une erreur semblable que D'Alembert prétendait que la probabilité d'amener pile deux fois de suite était $\frac{1}{3}$ au lieu d'être $\frac{1}{4}$, attendu que si, au premier jeu, on a face l'épreuve est manquée; en sorte qu'il n'admettait que trois cas possibles, face, pile et face, et enfin pile et pile.

L'erreur de ce raisonnement tient à ce que ces trois cas ne sont pas également probables. Pour avoir la probabilité telle qu'elle a été définie, il faut prendre tous les cas possibles, qui peuvent se présenter dans deux jets séparés, lesquels, tous également probables, sont au nombre de quatre.

La probabilité des événements dépend et des conditions du phénomène considéré et de l'individu qui l'apprécie. Un même événement peut pour diverses personnes avoir des probabilités différentes; la probabilité est donc une chose essentiellement relative.

On ne sait même pas encore s'il existe une probabilité absolue ou une chance propre. Pour Mr. Poisson la chance propre d'un événement serait sa probabilité pour un individu connaissant toutes les chances permanentes qui peuvent influencer son arrivée. Pour Laplace au contraire,

il n'y a qu'une probabilité relative. Il n'y a pas de hasard, le présent est une conséquence du passé. De telle sorte que pour un individu d'intelligence infinie possédant la formule qui règle ainsi l'univers, tout événement serait certain.

La probabilité mathématique ne pourra pas, il est vrai, mesurer rigoureusement la raison de croire; mais elle pourra nous en donner une idée analogue à celle que nous nous faisons d'un arc lorsque nous ne le connaissons que par une de ses lignes trigonométriques.

Probabilité totale. Si un événement peut arriver de plusieurs manières différentes, la probabilité totale de l'événement est la somme des probabilités partielles.

Une urne contient trois blanches, deux vertes et quatre noires quelle sera la probabilité d'amener une blanche ou une verte

Or, la probabilité d'amener une blanche est $\frac{3}{9}$; celle d'amener une verte est $\frac{2}{9}$ et comme d'ailleurs le nombre des chances demeure le même pour le tirage simultané de deux boules, la probabilité sera évidemment $\frac{3+2}{9}$.

Toutefois il faut que les deux événements partiels soient entièrement distincts, qu'ils s'excluent mutuellement.

Ainsi, une urne contient trois blanches et deux noires, seulement il y en a une de chacune de ces couleurs qui est plus petite que les autres, on demande quelle sera la probabilité d'amener une petite ou une blanche.

On commettrait une erreur, si l'on disait: la probabilité d'amener une blanche est $\frac{3}{5}$, celle d'amener une petite est $\frac{2}{5}$; par conséquent la probabilité cherchée est $\frac{3+2}{5} = 1$ ou la

certitude. Cela tiendrait à ce que l'une des blanches aurait été comptée comme blanche et comme petite.

<u>Probabilité</u> <u>composée</u>. Si on connait les probabilités de deux événements indépendants l'un de l'autre, la probabilité pour que ces deux événements arrivent l'un et l'autre est égale au produit de ces deux probabilités.

Si deux événements indépendants ont pour probabilités $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$; la probabilité pour qu'ils arrivent simultanément sera $\frac{2}{5} \times \frac{3}{7} = \frac{6}{35}$.

En effet, la chance du premier peut être assimilée au tirage d'une blanche dans une urne contenant deux blanches et trois noires : et le second dans une urne contenant trois blanches et quatre noires.

Cela posé, toute combinaison de l'une des boules de la première urne avec l'une quelconque de la seconde est également possible : le nombre des cas également possibles sera donc $5 \times 7 = 35$. Ceux qui seront favorables, c'est-à-dire, qui présenteront deux boules blanches s'obtiendront évidemment en combinant l'une ou l'autre des deux blanches de la première urne, avec l'une quelconque des trois blanches de la seconde. La probabilité telle que nous l'avons définie sera donc $\frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 7}$.

Ces deux principes de la <u>Probabilité</u> <u>totale</u> et de la <u>probabilité</u> <u>composée</u> sont applicables lors même qu'il est impossible de faire le dénombrement des chances : c'est une conséquence de l'axiome que l'on a admis. On est convenu d'identifier la chance d'un événement au tirage d'une blanche dans une urne de composition conve-

-nable. Cette composition peut ne pas être réalisable, mais on peut toujours par la pensée la supposer établie et par suite raisonner comme nous l'avons fait précédemment.

Le principe de la probabilité composée s'étend à un nombre quelconque d'événements simultanés.

Ainsi soient trois événements A, B, C dont les probabilités distinctes sont p, p', p'', la probabilité de l'événement (AB) est comme on a vu p, p' : en observant que la coexistence des deux événements A et B, peut être considérée comme un événement simple dont la probabilité est $p\,p'$, la probabilité pour que cet événement arrive en même temps que C sera $p\,p'\,p''$ et ainsi de suite.

Il est d'ailleurs évident que ces événements peuvent être successifs pourvu toutefois que la composition de l'urne soit ramenée à être toujours la même au moment de chaque tirage, et l'on voit que plus il y aura d'événements à attendre moins il y aura de chances car la probabilité se trouvera chaque fois multipliée par une fraction.

Enfin, si les événements simples au nombre de n, par exemple, sont tous également probables ou s'ils se réduisent à un seul devant se répéter n fois dans n épreuves, la probabilité sera alors p^n.

Cette formule conduit au résultat suivant qui est assez curieux : La probabilité pour qu'un événement dont la probabilité est $\frac{1}{n}$ arrive une fois au moins sur n épreuves approche de plus en plus de $\frac{2}{3}$ à moins que n devient de plus en plus grand.

En effet, la probabilité pour que l'événement arrive au moins une fois, sera donnée si l'on trouve la probabilité

pour que l'événement contraire arrive à chacune des n épreuves. Or la probabilité de l'événement contraire est évidemment $1-\frac{1}{n}$ et pour qu'il se répète n fois la probabilité sera $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$, celle de l'élément considéré sera donc $1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$, et comme $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$ tend vers e lorsque n devient très grand, cette expression tendra vers $1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}$ qui calculée donnera à peu près $\frac{2}{3}$.

On prend au hazard deux nombres de sept chiffres, par exemple, dans les tables de logarithmes de Callet. On demande quelle est la probabilité que l'on pourra retrancher l'un de ces nombres de l'autre, sans faire d'emprunt.

Soient A et B les deux nombres. Il faut que tous les chiffres de B, par exemple, ne surpassent pas les chiffres correspondants de A. Considérons deux chiffres correspondants quelconques de A et de B et appelons les pour abréger a et b. On ne pourra avoir que les combinaisons suivantes:

$$\left\{\begin{array}{l}a=0\\ b=0\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}a=1\\ b=0,1\end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l}a=2\\ b=0,1,2\end{array}\right. \quad \cdots\cdots \quad \left\{\begin{array}{l}a=9\\ b=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9.\end{array}\right.$$

On voit par là que le nombre de cas favorables est égal à $1+2+3+\cdots 9+10=55$. Le nombre de cas possibles est évidemment $10\times 10=100$. Ainsi la probabilité que b sera plus petit que a est $\frac{55}{100}$ et comme cette circonstance doit se présenter sept fois, puisque A et B ont chacun sept chiffres, la probabilité demandée est $\left(\frac{55}{100}\right)^{7}$. Elle tombe

entre $\frac{1}{66}$ et $\frac{1}{65}$. On conclut delà que sur $(100)^7$ cas possibles il y en a $(55)^7$ de favorables.

Le principe de la Probabilité composée s'applique encore dans le cas où les deux événements dépendent l'un de l'autre.

Il en serait ainsi si après le tirage d'une première blanche, on procédait à un second tirage sans la remettre, car alors la composition de l'urne ne serait plus la même. Or, il est facile de trouver la probabilité pour amener deux blanches de suite car en supposant que $m+n$ soit le nombre primitif de boules de l'urne, $m+n-1$ sera ce nombre après le premier tirage et le nombre des cas possibles sera évidemment $(m+n)(m+n-1)$; d'ailleurs si m représente le nombre de blanches, le nombre de cas favorables sera $m(m-1)$ de sorte que la probabilité sera bien $\frac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$.

On ferait exactement le même raisonnement dans le cas de trois tirages etc.

Enfin on peut présenter ce raisonnement sous une autre forme. Soient, A et A' deux événements dont le second dépend du premier. N le nombre total de cas possibles de l'événement composé, α le nombre de cas favorables à l'événement A et α' le nombre de cas favorables à A' quand A sera arrivé, ou si l'on veut le nombre de combinaisons A avec A', parmi toutes les combinaisons possibles. La probabilité de l'événement composé est $\frac{\alpha'}{N} = \frac{\alpha}{N} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}$, c'est-à-dire le produit de la probabilité de l'événement A par la probabilité que l'événement A' arrive quand A est arrivé.

Exemples. On jette deux dés à jouer et l'on demande la probabilité pour que la somme des deux points soit sept.

Le nombre total des chances est 36 ; celui des chances également favorables six car on pourra gagner par les six combinaisons suivantes :

1er dé :	1.	2.	3	4	5	6
2e dé :	6	5	4	3	2	1

La probabilité sera donc $\frac{6}{36}$ ou $\frac{1}{6}$: on arriverait au même résultat en appliquant le principe de la probabilité totale.

Quelle est la probabilité d'amener une blanche dans une urne dont on ignore la composition et que l'on sait seulement contenir n boules ?

Les différentes hypothèses que l'on peut faire sur la composition de l'urne seront :

$$\begin{cases} \text{blanches : } n, n-1, n-2, \ldots\ldots 0 \\ \text{noires : } \quad 0, \ 1, \ 2, \ldots\ldots n \end{cases}$$

et toutes ces hypothèses sont également possibles : d'ailleurs elles sont en nombre $n+1$ donc la probabilité pour que l'une de ces compositions ait lieu sera : $\frac{1}{n+1}$, et les probabilités d'amener une blanche dans chacun de ces cas seront : $\frac{n}{n}, \frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \ldots \frac{1}{n}$.

La probabilité dans chaque cas particulier, suppose que d'abord l'urne a une certaine composition et de plus que l'on amène une blanche. La probabilité totale sera donc :

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n}+\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-2}{n}+\cdots\frac{1}{n+}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{(n+1)n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}.$$

Ce résultat était d'ailleurs évident à priori.

Supposons maintenant qu'on sache qu'il y a au moins autant de boules blanches que de boules noires.

Il faut alors distinguer deux cas selon que le nombre de boules est pair ou impair. Supposons-le d'abord pair et égal à $2n$.

On ne pourra faire que les $n+1$ hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \text{Blanches} & n, \; n+1, \; n+2, \; \ldots \ldots 2n \\ \text{Noires} & n, \; n-1, \; n-2, \; \ldots \ldots \; 0. \end{cases}$$

On en conclut comme précédemment :

$$P = \frac{1}{n+1}\left[\frac{n}{2n} + \frac{n+1}{2n} + \frac{n+2}{2n} + \cdots \frac{n+n}{2n}\right] = \frac{1}{(n+1)2n}\left[\frac{(n+1).\,3n}{2}\right] = \frac{3}{4}.$$

Dans le cas où l'on supposerait le nombre des boules impair et égal à $2n+1$, la même marche conduirait à

$$P = \frac{3}{4} + \frac{1}{2n}.$$

Supposons qu'un événement puisse avoir lieu par un certain nombre de causes différentes, et que la probabilité pour que l'événement arrive par une d'elles soit différente pour chacune d'elles.

Appelons p_1, p_2, p_3, ... les probabilités pour que l'événement ait lieu, par la première, la deuxième, la troisième cause etc. Si π est la probabilité pour que l'événement ait lieu par l'une quelconque de ces causes, je dis qu'on a :

$$\pi = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots$$

En effet, soit le nombre total de ces cas également possibles. Parmi ces cas il y en a n_1 dus à la première cause, n_2 dus à la deuxième, n_3 à la troisième et ainsi de suite.

Puis la première cause offre m_1 cas favorables, la deuxième m_2, la troisième m_3 .... Donc, en prenant le nombre total de cas favorables et celui des cas possibles, on a :

$$\pi = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}{N} = \frac{m_1}{N} + \frac{m_2}{N} + \frac{m_3}{N} + \cdots\cdots$$

Mais, $\frac{m_1}{N} = p_1$, $\frac{m_2}{N} = p_2$, $\frac{m_3}{N} = p_3$ et ainsi de suite, par conséquent $\pi = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots\cdots$

On peut présenter ce résultat sous une autre forme :

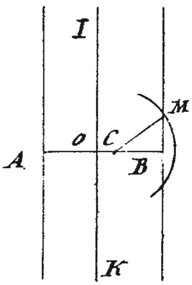
On a $\frac{m_1}{N} = \frac{n_1}{N} \cdot \frac{m_1}{n_1}$. Or, $\frac{n_1}{N}$ est la probabilité pour que la première cause ait lieu et $\frac{m_1}{n_1}$ est la probabilité pour que l'événement ait lieu en supposant qu'il ne puisse être produit que par la première cause. Comme on peut transformer de même chacun des termes qui entre dans l'expression de π, on en conclut que la probabilité d'un événement qui peut avoir lieu par plusieurs causes est égale à la somme des produits qu'on obtient en multipliant la probabilité pour qu'une cause quelconque ait lieu, par la probabilité de l'événement en supposant qu'il ne puisse arriver que par cette cause.

<u>Problème de l'aiguille</u>. On suppose qu'on a tracé sur une feuille de papier des raies parallèles et équidistantes et on demande quelle est la probabilité pour qu'une aiguille dont la longueur serait plus petite que la distance de deux de ces raies et qu'on jetterait au hazard sur le papier tombe sur une de ces raies ?

Nous n'avons besoin que de considérer la bande dans

l'intérieur de laquelle le milieu de l'aiguille est tombée ; car considérer ensuite toutes les bandes reviendraient à multiplier le nombre des cas favorables et le nombre de cas possibles par un même nombre.

Soit C le point où tombe le milieu de l'aiguille dans une position où elle rencontre BM ; menons une perpendiculaire BCA aux parallèles qui termineront la bande et une parallèle à ces mêmes lignes par le point O milieu de AB.



Pour la même raison nous n'avons à considérer que ce qui se passe d'un même côté de AB et de IK.

Soit $2l$ la longueur de l'aiguille et $AB = 2a$. Du point C comme centre avec l pour rayon je décris un cercle qui coupe BM en M ; toutes les pour lesquelles l'aiguille rencontrera la raie BM (son milieu restant au même point) sont comprises dans l'angle BCM. Or, si nous partageons l'angle BCM en parties infiniment petites, nous voyons qu'en posant $BCM = \varphi$, le rapport du nombre des cas favorables au nombre des cas possibles est :

$$\frac{\varphi}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2 \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{x}{a}\right)}{\pi}.$$

Ce sera la probabilité pour que le centre de l'aiguille étant tombé en C, elle aille rencontrer la droite BM.

Cherchons maintenant la probabilité pour que ce centre tombe au point C. Et pour cela, partageons OB en éléments infiniment petits dx, $\frac{dx}{l}$ représentera cette probabilité. Donc la probabilité pour que le

centre de l'aiguille tombant au point C, elle tombe en même temps dans l'intérieur de l'angle φ relatif à ce point est $\dfrac{2 \operatorname{arc} \cos.\left(\frac{x}{a}\right) dx}{\pi\, l}$ et la probabilité totale pour qu'elle rencontre la raie BM est :

$$\frac{2}{\pi l}\int_{x=0}^{x=a} \operatorname{arc} \cos.\left(\frac{x}{a}\right) dx.$$

Or, en intégrant par parties on a

$$\int \operatorname{arc} \cos.\left(\frac{x}{a}\right) dx = x \operatorname{arc} \cos \frac{x}{a} + \int x \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = x \operatorname{arc} \cos.\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2-x^2}$$

ce qui donne enfin pour la probabilité $p = \dfrac{2a}{\pi l}$.

Quand un événement est soumis à un très grand nombre d'épreuves; en désignant par N le nombre total de ces épreuves et par b le nombre des apparitions de l'événement demandé, le rapport $\dfrac{b}{N}$ varie beaucoup lorsque le nombre des épreuves effectuées est encore faible; mais si on l'augmente, on trouve que la différence $\dfrac{b}{N} - \dfrac{m}{m+n}$ $\left(\dfrac{m}{m+n}\right.$ représentant la probabilité mathématique) peut devenir aussi petit que l'on voudra. C'est ce qui constitue le théorème de Jacques Bernouilli.

En appliquant ceci à notre problème, le rapport $\dfrac{b}{N}$ deviendra sensiblement égal à $\dfrac{2a}{\pi l}$ lorsque N sera suffisamment grand et l'égalité $\dfrac{b}{N} = \dfrac{2a}{\pi l}$ fournira une manière empirique de calculer le nombre π.

Épreuves répétées. Soient p la probabilité d'un évé-

-nement E est celle de l'évènement contraire F. On sait que $p+q=1$. Supposons qu'on fasse μ épreuves successives. Par exemple, on peut essayer μ fois de tirer une boule blanche d'une urne qui contient des blanches et des noires, ou ce qui revient au même, de chercher à amener une boule blanche de μ urnes tout à fait pareilles. On peut demander alors quelle est la probabilité que dans ces μ épreuves, on amènera m blanches et n noires, dans un ordre quelconque non fixé d'avance (n étant égal à $\mu - m$).

Il résulte du principe des probabilités composées que cette probabilité serait $p^m q^n$ si les évènements E et F devaient se succéder dans un ordre déterminé d'avance. En appliquant le principe des probabilités totales, la probabilité cherchée sera $\pi = K p^m q^n$. K étant le nombre de permutations entre deux lettres E et F, en prenant la première m fois et la seconde n fois ; car il est clair qu'on obtient ainsi le nombre total de manières dont les deux évènements peuvent se succéder, le premier se présente m fois et le second n fois. Or, si au lieu de prendre la lettre E m fois et F n fois, on prend $m+n$ ou μ lettres différentes, le nombre des permutations de ces μ lettres qui est égal à $1.2.3 \ldots\ldots \mu$ conduira facilement à la détermination de K.

En effet, considérons l'une quelconque de ces permutations et supposons pour fixer les idées qu'elle affecte la disposition $E_1\, F_1\, E_2\, E_3\, F_2 \ldots$ etc. (le dernier indice de E étant, par hypothèse, égal à m_E et celui de F égal à n).

Cela posé, permutons dans la série considérée les lettres $E_1, E_2, E_3 \ldots E_m$ sans changer de place les lettres $F_1, F_2, \ldots F_n$; comme elles sont au nombre de m nous obtiendrons

1, 2, 3 . . . m permutations telles que

$E_1 F_1 E_2 E_3 F_2$ . . . . etc.

$E_2 F_1 E_1 E_3 F_2$ . . . . etc et ainsi de suite. Toutes ces séries seront comprises dans les 1, 2, 3 . . μ permutations que l'on peut faire avec ces μ lettres. D'ailleurs si l'on supprime les indices des E les 1, 2, 3 . . . m permutations précédemment obtenues deviendront identiques l'une à l'autre: Chaque série de la forme $E F_1 E E F_2$ . . etc se trouvera donc répétée 1. 2. 3. . . . m fois.

Enfin permutons dans une des séries $E F_1 E E F_2$ . . . . les lettres $F_1, F_2, \ldots F_n$, nous obtiendrons 1, 2. 3 . . . . n. séries de la forme:

$E F_1 E E F_2$ . . . . etc.

$E F_2 E E F_2$ . . . . etc.

qui toutes deviendront identiques si on supprime les indices de F.

Chacune des nouvelles séries se trouvera donc encore répétée 1. 2. 3 . . . n fois. Donc puisque K indique le nombre de permutations différentes, on devra avoir:

$$1.2.3\ldots\mu = K \times 1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n.$$

On en tire $K = \dfrac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n}$

et par suite la probabilité cherchée sera:

$$\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n}\; p^m q^n.$$

On peut écrire K sous la forme suivante en divisant haut et bas par 1. 2. 3 . . . n et se rappelant que $m+n=\mu$.

$$K = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots\ldots(\mu-m+1)}{1.2.3\ldots\ldots\ldots m}.$$

On voit ainsi que la probabilité trouvée n'est autre chose que le terme général du développement de $(p+q)^\mu$ car elle est égale à

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-m+1)}{1.2.3\dots\dots m}p^{\mu-m}q^m$$

On peut faire plusieurs hypothèses sur les événements produits dans les μ épreuves. On peut avoir :

E		F	
μ	avec	0	
$\mu-1$	fois	1	fois.
....	....	....	
0	....	μ	

La probabilité de chacun de ces événements composés se trouvera en faisant dans la formule précédente successivement $\begin{cases} m=\mu \\ n=0 \end{cases}$, $\begin{cases} m=\mu-1 \\ n=1 \end{cases}$ ...... $\begin{cases} m=0 \\ n=\mu \end{cases}$

D'ailleurs, il est certain que l'un quelconque de ces événements a lieu : donc la somme de toutes ces probabilités doit être égale à l'unité, ce qui donne :

$$1=p^\mu+\frac{\mu}{1}p^{\mu-1}q+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}p^{\mu-2}q^2+\text{etc.}$$

D'ailleurs les deux quantités p et q devant seulement satisfaire à la condition $p+q=1$ on pourra poser :

$p=\dfrac{a}{a+b}$ et $q=\dfrac{b}{a+b}$. En substituant dans la formule précédente et chassant le dénominateur il vient :

$$(a+b)^\mu=a^\mu+\frac{\mu}{1}a^{\mu-1}b+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}a^{\mu-2}b^2+\text{etc.}$$

qui est le développement du binôme.

On conçoit que cette démonstration de la formule du

binôme puisse se présenter ici ; car cette formule et les considérations précédentes s'appuient également sur la théorie des combinaisons.

On peut demander la probabilité pour que l'évènement E arrive au moins m fois sur μ épreuves.

Il pourra se faire que E arrive μ fois, $\mu-1$ fois .... jusqu'à m fois et la probabilité de chacun de ces évènements se trouvera encore en faisant successivement dans la formule des épreuves répétées $m=\mu$, $m=\mu-1$, ... jusqu'à $m=m$.

La probabilité totale cherchée sera donc :

$$\pi = p^{\mu} + \frac{\mu}{1} p^{\mu-1} q + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} p^{\mu-2} q^2 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-1)(\mu-m)+1}{1.2.3\ldots\ldots\ldots\mu-m} p^m q^{\mu-m} \quad (1).$$

On voit que si (les deux nombres m et μ étant déterminés) on complète le développement précédent jusqu'au terme q^{μ} on aura l'unité. Si donc, on désigne par π' l'ensemble des termes qui composent cette partie complémentaire on aura : $\pi+\pi'=1$ et π' sera la probabilité de l'évènement contraire.

D'après cela, on conçoit que dans certains cas il y ait un avantage à calculer π', car plus m sera petit, plus le nombre des termes de π sera grand et par suite plus celui de π' sera petit. D'ailleurs connaissant π' on aura $\pi=1-\pi'$.

Ainsi, si l'on demande la probabilité pour que E arrive au moins 1 fois, m sera égal à 1 on aura : $\pi'=q^{\mu}$ et par suite $\pi=1-q^{\mu}=1-(1-p)^{\mu}$.

La formule (1) pourra servir à déterminer combien il faudra faire d'épreuves pour que la probabilité d'amener

E au moins m fois soit égale à g, car il suffira de résoudre par rapport à μ.

On verrait en raisonnant exactement de la même manière que dans le cas de deux évènements que si p, q, r, sont les probabilités de l'arrivée de trois évènements E, F, G, tels que l'arrivée de chacun d'eux exclue celle des deux autres, la probabilité pour que ces évènements arrivent le premier m fois, le second n fois et le troisième l fois en μ épreuves (μ étant égal à $m+n+l$) est :

$$\pi = K p^m q^n r^l, \quad K \text{ étant égal à } \frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots m \times 1.2.3\ldots n \times 1.2.3\ldots l}$$

et par suite π représentant le terme général du développement de $(p+q+r)^\mu$.

La même formule est applicable à un nombre quelconque d'évènements.

<u>Problème des parties</u>. L'un des deux joueurs A et B gagne un point à chaque coup de jeu auquel ils jouent. Leurs probabilités respectives d'avoir un point à chaque coup sont p et q. Enfin, pour avoir gagné la partie, il manque a points au joueur A et b au joueur B. On demande quelles sont les probabilités α et β de ces deux joueurs de gagner la partie.

La partie sera terminée dans un nombre de coups au plus égal à $a+b-1$; car si, dans cet intervalle, le joueur A fait moins de a points, B en aura gagné au moins b ; ou si B en a fait moins de b, A en aura gagné au moins a. Elle pourra être terminée dans un nombre de coups moins considérable. Toutefois il est permis de supposer que l'on jouera toujours $a+b-1$ coups ; car si l'un des deux joueurs a fait, dans ce nombre de coups, tous les

points qui lui manquent, auquel cas il aura gagné la partie, l'autre n'aura pas pu avoir tous ceux qui lui manquaient avant ces $a+b-1$ coups, de sorte que la partie n'en sera pas moins gagnée par le joueur qui le premier avait fait tous ses points.

Alors la probabilité α du premier joueur est celle qu'il a de gagner au moins a points en $a+b-1$ coups. Si l'on fait pour abréger $a+b-1=\mu$; on aura d'après la théorie précédente:

$$\alpha = p^{\mu} + \frac{\mu}{1} p^{\mu-1} q + \dots + \frac{\mu(\mu-1)\dots(a+1)}{1.2.3\dots\mu-a} p^{a} q^{b-1}.$$

On pourrait calculer de même β; on trouverait le reste du développement de $(p+q)^{\mu}$; mais il est plus simple d'observer que α et β étant les probabilités de deux événements contraires on a: $\beta = 1-\alpha$.

Ce problème des parties est un des premiers qui ait été résolus à l'aide de la théorie des probabilités. Nous venons d'exposer la solution qu'en a donné Fermat.

Pascal l'avait auparavant résolu de la manière suivante: Il supposait qu'il fallait avoir trois points pour gagner, que les chances de A et de B étaient égales et que de plus A avait fait deux points et B un. Enfin, par une raison quelconque on devait arrêter la partie au coup suivant.

Dans l'état actuel de la partie, si l'on joue un coup de plus, de deux choses l'une ou A fera le point et il aura gagné auquel cas tout l'enjeu lui appartient ou il ne le fera pas et alors B aura deux points: les chances seront alors égales et ils devront emporter chacun la moitié de l'enjeu. Par conséquent, quelque soit le résultat, A est sur

de retirer au moins la moitié de l'enjeu ; il peut donc la prendre dès à présent. Maintenant il a autant de droit que B à l'autre moitié de l'enjeu puisque par hypothèse, leurs chances sont égales, il pourra donc en toute équité en retirer la moitié. En somme il aura droit de retirer les $\frac{3}{4}$ de l'enjeu total.

En appliquant la formule de Fermat on trouverait exactement le même résultat.

Nous avons admis que dans le cas où l'on ne termine pas la partie, l'enjeu doit être partagé dans le rapport des probabilités des joueurs. Ce résultat se concevra facilement par l'exemple suivant.

Supposons que N joueurs aient tous des chances égales pour gagner une même somme S qui est le fond du jeu. Il est clair que leurs mises devront être égales, et par conséquent égales à $\frac{S}{N}$.

Imaginons maintenant que m de ces joueurs se réunissent ou qu'ils soient remplacés par un seul. Il est clair que la mise de ce dernier devra être $m.\frac{S}{N}$ ou $S\frac{m}{N}$ c'est-à-dire Sp (p étant la probabilité qu'il a de gagner). Si n autres joueurs sont également remplacés par un seul, on verra de même que la mise de ce dernier devra être Sq, q étant la probabilité qu'il a de gagner. On verrait de même que les mises d'un nombre quelconque de joueurs doivent être proportionnelles aux probabilités qu'ils ont de gagner.

On appelle <u>Espérance mathématique</u> le produit d'une somme par la probabilité qu'on a de la gagner. Ainsi si un joueur doit gagner une somme S et que sa probabilité de la gagner soit p, Sp sera son espérance mathématique.

Par conséquent, si deux joueurs, dont les probabilités respectives sont p et q, ont à gagner une somme S, leurs mises doivent être égales à leurs espérances mathématiques Sp, Sq.

Loteries. une urne renferme n boules portant chacune un numéro particulier. A chaque tirage il sort r numéros; quelle est la probabilité pour que ce tirage renferme s numéros désignés d'avance.

Le nombre des combinaisons distinctes sera évidemment égal au nombre des combinaisons de n prises r à r ou

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{1.2.3\cdots\cdots r}.$$

Cherchons le nombre de celles qui renferment les s numéros désignés, le rapport de ce nombre au précédent donnera la probabilité cherchée.

Un bon tirage sera celui qui sur les r numéros sortis contiendra les s désignés, il en restera donc $r-s$ qui leur seront étrangers et qui devront se trouver dans les $n-s$ numéros non désignés d'avance. Par conséquent; on aura autant de tirages favorables que l'on pourra faire de combinaisons $r-s$ à $r-s$ avec ces $n-s$ lettres, c'est-à-dire,

$$\frac{(n-s)(n-s-1)\cdots\cdots(n-s-(r-s)+1)}{1.2.3\cdots\cdots\cdots r-s}.$$

La probabilité cherchée sera donc:

$$p=\frac{1.2.3\cdots r}{1.2.3\cdots r-s}\times\frac{(n-s)(n-s-1)\cdots(n-r+1)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}$$

$$p=\frac{(r-s+1)\cdots\cdots(r-1)r}{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-s+1)}.$$

Dans la loterie Royale le nombre des numéros était 90 : à chaque tirage il sortait cinq numéros. On pouvait jouer sur l'extrait, c'est-à-dire, sur un seul numéro, sur l'ambe, le terne, le quaterne et rarement sur le quine.

En faisant dans la formule précédente $n = 90 . r = 5$ et S successivement égal à 1, 2, 3, 4, 5 on aura la probabilité de gagner dans chacun de ces cas. La mise étant un franc ; soit S la somme que le joueur doit recevoir s'il gagne, p la probabilité qu'il a de gagner. Il faut pour que le jeu soit équitable que l'espérance mathématique Sp soit égale à sa mise, c'est-à-dire à un franc. Donc $S = \frac{1}{p}$. Le gouvernement ne donnait pas cette somme ; voici le tableau de ce que l'on recevait

	Probabilités	Le gagnant recevait
Extrait simple	...... $\frac{1}{18}$	...... 15 francs
Ambe simple	.... $\frac{1}{400,5}$	...... 270.
Terne	$\frac{1}{11748}$	 5500
Quaterne	$\frac{1}{464002}$	 75000
Quine	$\frac{1}{43949268}$	... 1000000

Ce tableau montre à quel point cette entreprise était basée

sur l'ignorance du public.

Problème de Pétersbourg. Le problème suivant nous fournira l'occasion de faire quelques remarques sur l'espérance mathématique.

Deux joueurs A et B jouent à pile ou croix, mais à des conditions différentes. Si le premier coup donne pile, A paie deux francs à B; s'il donne croix on continue. Si le second coup donne pile A paie quatre francs à B, s'il donne croix on continue encore et toujours et toujours ainsi A doublant à chaque coup la somme qu'il doit donner à B; de sorte que si le $n^{ème}$ coup seulement donne pile, A paiera 2^n francs à B. On conviendra toutefois que si le $n^{ème}$ coup ne donne pas encore pile le jeu cessera. Cherchons ce que B doit mettre au jeu par l'espérance mathématique.

La probabilité qu'il amène pile au premier coup est $\frac{1}{2}$, la somme qu'il gagnerait est deux francs, l'espérance mathématique est $\frac{1}{2}\times 2=1$.

Au second coup la probabilité d'amener encore pile est $\frac{1}{2^2}$ et il gagnerait deux francs, l'espérance mathématique est encore 1. Au $n^{ème}$ coup la probabilité d'amener pile est $\frac{1}{2^n}$, il gagnerait 2^n francs et l'espérance mathématique est encore $2^n\times\frac{1}{2^n}=1$.

Or, on peut imaginer n joueurs dont le premier pour le premier coup, le second pour le second coup etc ... et qui remplacent B. La partie reste la même. Mais chacun de ces joueurs doit mettre un franc au jeu; donc B doit mettre n francs.

Il se présente ici une objection. Si n est très grand, B devra payer une somme assez forte pour en gagner une qui probablement sera très faible; car il arrivera très

rarement qu'il ne gagnera qu'après un nombre considérable de coups et dans ce cas il touchera une somme égale à 2^k (K étant le nombre de coups qu'il a dû faire pour gagner).

Pour lever cette difficulté désignons par a la fortune de A et par n un nombre tel que l'on ait $2^n = a$; il est évident qu'après le $n^{ème}$ coup A ne pourra pas promettre plus que a. Supposons qu'il promette a à chaque coup à partir du $n^{ème}$ la probabilité pour que B amène pile au $(n+1)^{ème}$ est $\frac{1}{2^{n+1}}$, la somme à gagner est a, l'espérance mathématique est $\frac{a}{2^{n+1}}$. Pour le coup suivant elle serait : $\frac{a}{2^{n+2}}$ etc. de telle sorte qu'en supposant la partie continuée indéfiniment B devra mettre au jeu :

$$n + \frac{a}{2^{n+1}}\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots\right] = n + \frac{a}{2^n}.$$

En supposant que a fut égal à 1 000 000 francs la mise de B serait donné par la relation $2^n = 1000000$. En prenant les logarithmes on en conclurait $n = \frac{6}{\log. 2} =$ à peu près dix neuf francs.

On voit qu'on a levé cette difficulté en tenant compte de ce que A ne pourrait pas promettre plus que sa fortune.

Buffon dans un petit traité d'Arithmétique sociale a montré qu'au jeu l'avantage du gagnant n'était pas relativement aussi considérable que le désavantage du perdant. Car, en supposant qu'ils aient une fortune égale a et que la somme mise en jeu soit α l'avantage relatif de l'un pourra être représenté par $\frac{\alpha}{a+\alpha}$ et la perte de l'autre par $\frac{\alpha}{a-\alpha}$. Il est évident que la seconde fraction est la plus grande.

Problème de Huyghens. Trois joueurs A, B, C, tirent l'un après l'autre dans une urne qui renferme deux boules blanches et quatre noires. Celui qui tirera le premier une boule blanche gagnera. Quelle est la probabilité que chacun d'eux a de gagner.

Il y a deux manières d'entendre cet énoncé. 1° on remet les boules après chaque tirage. 2° on retire les boules après chaque tirage.

1er Cas. Lorsque A entre au jeu, sa probabilité d'amener blanche est $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; s'il ne gagne pas il faudra qu'il ait tiré une boule noire ainsi que les deux autres, sa probabilité de pouvoir rentrer au jeu sera donc celle d'amener trois noires de suite ou $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; de plus pour gagner il lui faudra amener blanche, par conséquent sa probabilité de gagner à la seconde rentrée sera $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$. On calculerait de même que sa probabilité de gagner à une troisième rentrée serait $\left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \frac{1}{3}$ et ainsi de suite, de telle sorte que si l'on désigne par p_a sa probabilité de gagner à un instant quelconque on aura :

$$p_a = \frac{1}{3}\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \text{etc.}\right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3^3}{3^3 - 2^3}.$$

Pour le joueur B, la probabilité de gagner en entrant sera celle que A ait tiré une noire et qu'il ait tiré une blanche, ce sera donc $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)$. Sa probabilité de gagner à la seconde rentrée serait $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^4$, à la troisième $\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^7$ et ainsi de suite de sorte que l'on aura :

$$p_b = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \text{etc}\right] = \frac{2}{3}\, p_a.$$

On trouverait exactement de la même manière :

$$p_c = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left[1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \text{etc.}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^2 p_a.$$

On en conclut : $p_a : p_b : p_c :: 9 : 6 : 4$ et d'après la règle de l'espérance mathématique leurs enjeux devront être proportionnels à ces nombres.

2e. Cas. Lorsque A entre au jeu sa probabilité d'amener blanche sera toujours $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. S'il ne gagne pas à ce coup sa probabilité de pouvoir rentrer sera celle que l'on puisse tirer trois noires de suite. Ici il faut remarquer que la composition de l'urne varie à chaque tirage : la probabilité d'amener la première noire sera, comme nous l'avons vu, $\frac{4}{6}$ pour la seconde ce sera $\frac{3}{5}$, pour la troisième $\frac{2}{4}$, par conséquent la probabilité d'amener les trois noires de suite sera : $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$; d'ailleurs comme il ne reste plus que trois blanches, la probabilité d'amener blanche sera $\frac{2}{3}$ de sorte que la probabilité de A de gagner à sa rentrée sera : $\frac{2}{6} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \times \frac{2}{3}$. D'ailleurs, ce sera sa probabilité de gagner car il est évident qu'il ne pourra pas rentrer une seconde fois.

Les mêmes raisonnements donneront pour la probabilité de B : $\frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}$ et enfin pour celle de C : $\frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4}$.

Probabilités sur la vie humaine.

Tables de Mortalité. Supposons qu'à une certaine époque on ait enregistré a_0 naissances, qu'après un an on ait constaté la survivance de a_1 de ces individus, après deux ans celle de a_2 et ainsi de suite. Il suffira de mettre

en regard de chaque année, ces différents nombres a_0, a_1, a_2 etc pour construire ce que l'on appelle une table de mortalité.

Mais ce procédé est difficile à mettre à exécution dans l'état actuel de la société. Il faut pouvoir suivre les individus depuis leur naissance jusqu'à la mort. On n'a pu le faire que sur des têtes choisies sur des rentes viagères.

On a recours à un autre procédé. On suppose la population stationnaire, c'est-à-dire que le nombre des naissances étant égal au nombre des décès, le nombre des individus de chaque âge qui meurent dans chaque année demeure le même. Ce résultat est confirmé par l'observation dans des limites suffisamment étendues.

D'après cela il sera facile de construire une table de mortalité. Si N est le nombre des naissances, M_0, M_1, M_2, M_3 ... etc. le nombre des individus morts avant d'avoir atteint leur première, deuxième, etc année (ces nombres étant constatés pendant une année déterminée). Les expressions:

$$\begin{cases} a_1 = N - M_0 \\ a_2 = N - M_0 - M_1 \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

indiquent évidemment les nombres d'individus survivant au bout d'une, de deux .... etc années; et pour établir la table de mortalité, il suffira, comme nous l'avons dit de mettre en regard les nombres

années	suivantes
m	a_m
$m+1$	a_{m+1}
$m+n$	a_{m+n}.

Admettons qu'en suivant la table de mortalité construite comme nous venons de le dire on trouve un nombre $a_{m'}$, telle que l'on ait $a_{m'} = \frac{1}{2} a_m$, le nombre m' qui se trouvera en regard sera ce que l'on appelle la vie probable pour l'âge m; ce sera l'année pour laquelle sur a_m individus de l'âge m il n'en survivra que la moitié.

Vie moyenne. Puisque sur a individus qui naissent à une même époque, il y en a seulement a_1 qui vivent plus d'un an, il en est mort $a_0 - a_1$ qui ont vécu moyennement une demie-année, et on peut admettre que $(a_0 - a_1)\frac{1}{2}$ est la somme des temps pendant lesquels ils ont vécu. De même

$(a_1 - a_2)\frac{3}{2}$, $(a_2 - a_3)\frac{5}{2}$, ... sont respectivement les sommes

des durées des existences des individus qui meurent avant l'âge de deux ans de trois ans et ainsi de suite. Si l'on en fait la somme et qu'on la divise par a_0, on aura ce que l'on appelle la vie moyenne. En la désignant par v_0

on aura $v_0 = \dfrac{\frac{1}{2}(a_0 - a_1) + \frac{3}{2}(a_1 - a_2) + \frac{5}{2}(a_2 - a_3) + \cdots \text{ etc.}}{a_0}$

Ou en réduisant :

$$V_0 = \frac{1}{2} + \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots\cdots}{a_0}$$ cette formule donne la

vie moyenne calculée à partir de la naissance. On pourra ainsi calculer la vie moyenne au moyen des tables de mortalité.

Cette formule peut être donnée par la règle de l'espérance mathématique. On suppose que chaque individu contribue également à la vitalité commune. Les différents biens qu'il peut attendre sont de vivre $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$ .... années; les probabilités d'obtenir ce bien sont :

$\frac{a_0 - a_1}{a_0}$, $\frac{a_1 - a_2}{a_0}$ etc. de sorte que la mise de chacun d'eux sera bien :

$$V_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0 - a_1}{a_0}\right) + \left(\frac{a_1 - a_2}{a_0}\right)\frac{3}{2} + \cdots\cdots$$

La vie moyenne peut être calculée à partir d'un instant quelconque de la vie.

Des raisonnements en tout identiques à ceux que l'on a fait dans le cas précédent conduiront à la formule :

$$V_m = \frac{\frac{1}{2}\left(a_m - a_{m+1}\right) + \frac{3}{2}\left(a_{m+1} - a_{m+2}\right) + \text{etc.}}{a_m}$$

$$V_m = \frac{1}{2} + \frac{a_{m+1} + a_{m+2} + a_{m+3} + \cdots\cdots}{a_m} \quad (1)$$

Le calcul de la table de ces vies moyennes au moyen de la formule précédente serait fort long ; car à chaque fois il faudrait recommencer une somme des quantités telles que a_{m+1}, a_{m+2} ... etc. prises jusqu'à la fin de la table de mortalité.

On remarque que l'on aurait :

$$V_m = \frac{1}{2} + \frac{a_{m+1}}{a_m}\left[V_{m+1} + \frac{1}{2}\right]$$ relation qui permettra de calculer facilement la table de vie moyenne en remontant de V_{m+1} à V_m et ainsi de suite.

Formation des tables de mortalité lorsque la population ne reste pas stationnaire.

Appelons P, N, M la population et les nombres de naissances et de décès pendant la première année ; P', N', M' ; P'', N'', M'', ... les quantités correspondantes,

pendant la seconde, la troisième année.

On aura évidemment $P' = P + N - M$; ou bien si l'on pose $\frac{N}{P} = n$ et $\frac{M}{P} = m$ on a : $P' = P(1 + n - m)$ ou en faisant $1 + n - m = r$, $P' = Pr$.

Quand la population ne varie que lentement d'une année à la suivante, on peut par une première approximation supposer n, m, r constants pendant un certain nombre d'années. On voit qu'alors les nombres P, P', P''.... qui expriment la population dans les années successives croissent comme les termes d'une progression géométrique dont la raison est r.

Le même rapport constant r existe entre les nombres successifs N, N', N''.... d'une part, et de l'autre entre M, M', M''..... En effet n et m étant sensiblement constants pendant plusieurs années successives, on a

$$\frac{N}{P} = \frac{N'}{P'} = \frac{N''}{P''} \text{ ou } \frac{N'}{N} = \frac{P'}{P} = \frac{N''}{N'} = \frac{P''}{P'} \cdots\cdots = r.$$

On verrait de même que $\frac{M'}{M} = \frac{M''}{M'} = \frac{M'''}{M''} \cdots\cdots = r$.

D'après les relevés du mouvement de la population en France de 1817 à 1837 $r = 1 + \frac{1}{194}$. Ainsi la population s'accroît maintenant en France chaque année de $\frac{1}{194^e}$ de sa valeur. Si r est supposé constant la population augmentera de :

0,1	en 18 ans
0,2	 35
0,3	 51
0,4	 65
0,5	..... 79.

Elle serait doublée en 135 ans

Au moyen des relations précédentes, on peut construire une table de mortalité, quand on connait les nombres N, M et r, M étant donné pour tous les âges de l'existence d'année en année. Appelons alors M_0, M_1, M_2, ... les nombres des morts avant l'âge d'un an, de deux ans, parmi les N individus qui naissent dans une certaine année A.

Pendant cette année A sur N naissances il y a M_0 individus qui meurent avant l'age d'un an et par conséquent $N-M_0$ individus qui vivent après la première année. Donc, en conservant les notations adoptées, on a :

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{N-M_0}{N}.$$

Pour avoir $\frac{a_2}{a_0}$ il faut remonter à l'année $A-1$ qui précède celle que l'on considère. Pendant cette année précédente il est né $\frac{N}{r}$ individus. Or à la fin de l'année le nombre des individus agés de deux ans sera égal à $\frac{N}{r}$ moins le nombre de ceux qui sont morts dans l'année $A-1$ qui précède $\frac{M_0}{r}$, moins encore ceux morts dans l'année A au nombre de M_1. On conclut delà immédiatement.

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{\frac{N}{r} - \frac{M_0}{r} - M_1}{\frac{N}{r}} = \frac{N - M_0 - M_1 r}{N}.$$

On trouvera de même :

$$\frac{a_3}{a_0} = \frac{N - M_0 - M_1 r - M_2 r^2}{N}$$ et ainsi de suite.

D'après les tables données en 1806 par Duvillard et calculées sur environ 1000000 de décès observés dans toute la France avant la révolution, la vie probable d'un individu à sa naissance est comprise entre vingt et vingt un ans. Car, elles font voir que sur 1000000 d'individus qui naissent à une même époque, il y en a 502216 qui atteignent l'âge de vingt ans et qu'il y en a 498317 qui parviennent à vingt un ans. Les mêmes tables donnent cinquante cinq à cinquante six ans pour la vie probable d'une personne de vingt ans et environ soixante trois ans, pour celle d'une personne de quarante ans.

Les dernières tables de mortalité construites en France sont celles de Mr Demonferrand. Elles ont été calculées sur des données prises de 1817 à 1832 et sur un nombre de décès égal à

11,793,289 dont { 5,952,352 hommes
5,840,937 femmes.

Ces tables ont vérifié les derniers recensements avec une erreur qui ne dépassait pas $\frac{1}{30^e}$.

En 1834 il a été publié en Angleterre une table construite d'après les observations de 3,900,000 décès.

Les tables de mortalité peuvent servir à déterminer la probabilité que l'on a de vivre encore un nombre n d'années lorsque l'on est arrivé à un âge m, car il est évidemment représenté par $\frac{a_{m+n}}{a_m}$.

Ainsi la probabilité de vivre dix ans pour un homme de quarante ans était pour le siècle dernier

Dans les tables de

à Londres .... Price .... $\frac{224}{322} = 0,696.$

à Vienne ... Su .... $\frac{220}{298} = 0,738.$

à Berlin ..... id .... $\frac{224}{300} = 0747$

En Suisse (Campagne) Muret .... $\frac{431}{506} = 0,852.$

France .... Duvillard .... $\frac{297}{369} = 0,805$

Deparcieux (têtes choisies) .. $\frac{581}{657} = 884$

D'après les tables de Mr. Demonferrand elle serait pour les
- hommes $\frac{4492}{5097} = 0,881.$
- femmes $\frac{4691}{5360} = 0,875$

La vie probable à partir de la naissance est à
- Paris .... 8 a 9 ans
- Londres .... moins de 3 ans
- Vienne .... moins de 2 ans.
- Berlin .... un peu plus de 2 ans.

A partir de 40 ans elle est à
- Paris plus de .... 21 ans.
- Londres 18
- Vienne plus de 19
- Berlin .... id
- Suisse 25

France (Durillard) 23
id. (Deparcieux) . . . . 29 (têtes choisies)

id. (Demonferrand) { hommes – 28 ans, 3 mois
femmes – 27 ans, 8 mois.

D'après les tables de Mr. Demonferrand construites pour la France entière, la vie probable à la naissance est pour les
{ garçons – 41 ans 11 mois
filles – 45 ans 7 mois.

le maximum pour les deux sexes est à trois ans, il est de 56 ans et 5 mois ; à partir de cet âge la vie probable est un peu plus grande pour les hommes que pour les femmes ; à partir de 70 ans elle est la même pour les deux sexes.

Vie moyenne. C'est par la durée de la vie moyenne qu'on compare sous le rapport de la vitalité les différens lieux à diverses époques.

A partir de la naissance elle a

Londres – de	17 ans	11 mois
Vienne	15	9
Berlin	17	1
Suisse	37	1
France (Durillard)	28	9
id (Demonferrand) { hommes	38	4
femmes	40	10

Le maximum de la vie moyenne a lieu vers 6 à 7 ans et à cette époque il est pour les

garçons.	de	48 ans, 9 mois
filles		49 ans, 9 mois.

La vie moyenne est d'abord inférieure à la vie probable: elles deviennent égales vers 54 ou 55 ans, ensuite la vie moyenne surpasse la vie probable.

Lois de la population.

De 1817 à 1837 il est né en France:
10,485,909 garçons.
9,857,890 filles.

Dans ces 21 années la quantité r demeure à peu près constante; elle varie entre $\frac{15}{14}$ et $\frac{19}{18}$ on prend pour valeur moyenne $\frac{17}{16}$; pendant longtemps on avait admis la valeur $\frac{22}{21}$.

Ce rapport ne demeure pas le même pour les enfants légitimes et les enfants naturels; dans ce dernier cas on a $r = \frac{24}{23}$.

L'influence du climat sur cette quantité r est à peu près insensible en France; en effet, pour les départements du Nord on a moyennement $r = 1,06340$ et pour ceux du Midi $r = 1,06121$.

On s'est occupé encore de la distribution de la population à la surface de la France. On appelle population spécifique d'un pays le nombre d'habitants qu'il renferme moyennement par Kilomètre carré.

La population spécifique de la France est de 64 à 65 habitants. Dans 39 départements y compris celui de la Seine, la population spécifique est supérieure à 60 et

inférieure dans les autres. Le département de la Seine est en dehors de la règle commune ; la population spécifique est 33 fois $\frac{1}{2}$ plus considérable. Paris contient 27,315 habitans par Kilomètre carré ou 272 par hectare ; ce qui donne une population spécifique 121 fois égale à la moyenne de la France.

Pour le département du Nord la population spécifique est 191, pour celui du Rhône de 179, de la Seine inférieure de 122, et pour les départements des Hautes Alpes et des Basses Alpes qui sont les moins peuplés on a 23 et 22.

La population de la France serait de 1,038,709,000 habitans si elle était partout aussi agglomérée que dans le département de la seine, elle serait de 12,029,000 habitans si elle l'était comme dans le département des Basses Alpes.

Le recensement de 1841 donne pour cette population 34,230,178.

Il reste toujours un peu d'incertitude sur ces résultats parceque les recensements ne peuvent pas être rigoureusements exacts. En outre on ne tient pas compte de la population flottante ; il peut aussi arriver dans l'état normal de la population des perturbations considérables, c'est ce qui a eu lieu en France en 1832, année du Choléra.

L'âge des morts est souvent indiqué d'une manière inexacte dans les actes de décès. Ces diverses causes et d'autres encore peuvent rendre assez délicat le calcul des tables. Enfin la loi de la mortalité est diverse suivant les différentes conditions où les individus sont placés.

Aussi d'après le petit nombre de documents recueillis jusqu'à ce jour, on a construit des tables qui donnent des

résultats différents.

On peut établir les formules qui servent à construire les tables de mortalité dans le cas où la population n'est pas stationnaire d'une manière un peu différente.

On a toujours évidemment $\frac{a_1}{a_0} = \frac{N - M_0}{N}$.

Dans l'année suivante comme tous les éléments de la population sont censés varier de la même manière on observerait $M_1 r$ morts entre un et deux ans, de sorte qu'au commencement de la troisième année il n'en restera plus que $N - M_0 - M_1 r$; on aura donc :

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{N - M_0 - M_1 r}{N}$$ on trouverait de même

$$\frac{a_3}{a_0} = \frac{N - M_0 - M_1 r - M_2 r^2}{N}.$$

Indépendamment de la table de mortalité on a intérêt à former une table de la population.

Un premier nombre P_0 représente la population totale à un instant donné, P_1 représente le nombre de ceux qui ont un an d'âge, P_2 celui des enfants de deux ans d'âge et ainsi de suite.

Il en résulte que $P_3 - P_2$, par exemple indiquera le nombre des enfants compris entre 2 et 3 ans d'âge.

Ayant construit une table de mortalité, on peut facilement en déduire la loi de la population.

D'abord P_0 se trouvera immédiatement, car ce sera le nombre des vivants de tous les âges. Si on veut supputer le nombre des enfants dont l'âge est compris entre 0 et 1 an, ce nombre sera compris entre a_0 et a_1 et l'on admet que

ce nombre est approximativement égal à $\frac{a_0+a_1}{2}$. On admet de même que le nombre de ceux qui n'ont pas plus de deux ans est $\frac{a_1+a_2}{2}$ et ainsi de suite, de sorte que pour une localité où le nombre des naissances serait a_0 on aurait :

$$P_0 = \frac{1}{2}(a_0+a_1) + \frac{1}{2}(a_1+a_2) + \cdots \&^a \ldots$$

Il en résulte que généralement pour une localité dont le nombre des naissances serait N on aurait :

$$P_0 = \frac{N}{a_0}\left[\frac{1}{2}(a_0+a_1) + \frac{1}{2}(a_1+a_2) + \cdots \text{etc.}\right]$$

ou $P_0 = N\left(\frac{1}{2} + \frac{a_1+a_2+a_3+\cdots \text{etc}}{a_0}\right)$

Il faut toutefois remarquer que ce raisonnement suppose la population stationnaire car il implique la nécessité que les quantités $a_0, a_1, a_2 \ldots$ etc. demeurent les mêmes d'une année à l'autre.

On déduit de la formule précédente $P_0 = Nv_0$ (v_0 étant la vie moyenne calculée à partir de la naissance).

Ce résultat permet de calculer la vie moyenne. Connaissant la loi de la population, et par cela même offre un moyen de vérification d'une table de mortalité supposée construite.

Enfin, on aura évidemment :

$$P_1 = P_0 - \frac{N}{a_0} \cdot \frac{a_0+a_1}{2} \text{ et ainsi de suite.}$$

<u>Cas où la population n'est pas supposée stationnaire.</u>

Le nombre des naissances est N; pour l'année précédente

il était $\frac{N}{r}$; par conséquent $\frac{N}{r}\cdot\frac{a_1}{a_0}$ est le nombre de ceux qui survivent actuellement avec une année d'âge; de même $\frac{N}{r^2}\ \frac{a_2}{a_0}$ sera le nombre de ceux qui survivent avec deux ans d'âge et ainsi de suite, de sorte que si on fait la somme de tous ces nombres on aura.

$$P_0 = N\left(1 + \frac{1}{r}\cdot\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{r^2}\ \frac{a_2}{a_0} + \cdots\right).$$

Rentes viagères.

Il existe des compagnies qui pour une somme donnée assurent une certaine rente à un individu pendant toute sa vie. On conçoit sans peine qu'une pareille spéculation doit être établie sur la plus ou moins grande probabilité de la vie humaine. Le but que nous nous proposons est de déterminer la somme qu'il faut déposer à un certain âge m pour que la compagnie vous assure une rente déterminée pendant le reste de votre vie.

Cherchons quel est le prix R_m d'une rente viagère de un franc pour un individu d'âge m. Et pour celà imaginons que tous les clients d'âge m dont le nombre a_m est déterminé par la table de mortalité dont se sert la compagnie viennent acheter une rente viagère de un franc. La somme qu'ils devront déposer actuellement sera évidemment égale à $R_m\, a_m$

Mais, au bout d'un an, le banquier devra remettre à chacun des a_{m+1} survivant la somme de un franc, au bout de deux ans il aura encore à verser un franc aux a_{m+2} survivant et ainsi de suite jusqu'à la fin de

la table, et la somme qu'ils auront dû déposer actuellement devra être telle, qu'en portant intérêt chaque année elle satisfasse à ces différents versements. On devra donc avoir :

$$R_m a_m = \frac{a_{m+1}}{1+r} + \frac{a_{m+2}}{(1+r)^2} + \cdots\cdots$$

On en tire :

$$R_m = \frac{1}{1+r} \cdot \frac{a_{m+1}}{a_m} + \frac{1}{(1+r)^2} \quad \frac{a_{m+2}}{a_m} + \cdots\cdots$$

Cette formule se trouve immédiatement en appliquant le principe de l'espérance mathématique.

Pour construire les tables donnant le prix de cette rente aux différents âges, on emploie un procédé analogue à celui employé pour la construction des tables de la vie moyenne.

En effet, on aurait :

$$R_{m+1} = \frac{1}{1+r} \quad \frac{a_{m+2}}{a_{m+1}} + \frac{1}{(1+r)^2} \cdot \frac{a_{m+3}}{a_{m+1}} + \text{etc.}$$

$$R_{m+1} = \frac{1}{a_{m+1}} \left[\frac{a_{m+2}}{1+r} + \frac{a_{m+3}}{(1+r)^2} + \cdots\cdots \right] \quad \text{de même}$$

$$R_m = \frac{1}{a_m} \left[\frac{a_{m+1}}{1+r} + \frac{a_{m+2}}{(1+r)^2} + \cdots\cdots \right]$$

Il en résulte : $R_m = \frac{1}{a_m} \left(\frac{a_{m+1}}{1+r} \right) + \frac{a_{m+1}}{a_m} \cdot \frac{1}{1+r} R_{m+1}$.

On peut se rendre compte de cette formule. Tous ceux qui ont l'âge m acquièrent le droit à un franc à la fin de l'année et au contrat de rente viagère correspondant à l'âge m+1. Or, la probabilité d'arriver à l'âge m+1 est $\frac{a_{m+1}}{a_m}$; le bien attendu est un franc à la fin de l'année augmenté du prix de la rente

R_{m+1} à partir de cette année, s'il vivait jusqu'au remboursement complet, car recevoir un franc chaque année reviendrait à recevoir $R_{m+1}+1$ francs à la fin de l'année; cette somme vaut aujourd'hui. $\frac{1}{1+r}\left(1+R_{m+1}\right)$; la mise doit donc être

$$R_m = \frac{a_{m+1}}{a_m}\cdot\frac{1}{1+r}\left[1+R_{m+1}\right]$$

Il est facile de calculer la table. Soit $m+1$ l'âge le plus élevé de la table; alors R_{m+1} est zéro car l'année suivante on ne payera aucune rente; d'où $R_m = \frac{a_{m+1}}{a_m}\cdot\frac{1}{1+r}$. On aura ensuite R_{m-1} et ainsi de suite.

<u>Rentes viagères sur deux têtes</u>. On peut se proposer de chercher la somme nécessaire à deux individus d'âges m et n pour l'achat d'une rente viagère de un franc dont ils partagent la jouissance pendant qu'ils vivent ensemble, ce qui est réversible en totalité sur la tête du dernier survivant.

Pour cela, il nous faut d'abord calculer la somme nécessaire à l'achat d'une rente de un franc pendant leur vie commune, ce sera évidemment en la désignant par $A_{(m+n)}$, d'après ce que nous avons vu.

$$A_{(m,n)} = \frac{a_{m+1}\cdot a_{n+1}}{a_m\cdot a_n}\cdot\frac{1}{1+r} + \frac{a_{m+2}}{a_m}\cdot\frac{a_{n+2}}{a_n}\cdot\frac{1}{(1+r)^2} + \&^{ca}\ldots$$

Cela posé, s'ils payaient R_{m+1} R_n ils auraient droit à recevoir un franc chacun pendant toute leur vie et par suite ils recevraient deux francs pendant leur vie commune; pour ne recevoir qu'un franc ils devront donc réclamer de la compagnie le prix d'une rente de un franc pendant ce temps ou

ce qui revient au même, ils devront seulement verser une somme $R_{(m,n)} = R_m + R_n - A_{(m,n)}$.

Assurance d'un capital à recevoir au décès.

Appelons r l'intérêt de un franc, R_m le prix d'une rente viagère de un franc ; proposons-nous de calculer le prix C_m d'une assurance de un franc payable au décès.

Celui qui reçoit à titre de prêt une somme quelconque contracte l'obligation d'en servir les intérêts jusqu'au moment où il la remboursera.

D'après cela, la compagnie qui recevrait la somme $r R_m + C$ contracterait deux obligations.

1° en raison de la première somme elle devrait servir l'intérêt de un franc pendant la vie de l'assuré.

2° en raison de la seconde somme (C_m) elle devrait payer un franc au décès.

Donc l'obligation totale qu'elle contracterait équivaudrait à celle résultant de l'emprunt de un franc ; d'où il résulte que l'on doit avoir :

$C_m + r R_m = 1$ et par suite $C_m = 1 - r R_m$.

Cette formule indique bien que la table correspondante à ces assurances pourra être construite au moyen de la table des rentes viagères.

Au lieu de payer immédiatement C_m on peut se proposer de payer x au commencement de la première année, x au commencement de la deuxième ou à la fin de la première, x à la fin de la deuxième et ainsi de suite. Ce sera comme si l'individu d'âge m donnait au banquier d'abord la somme x puis la rente viagère x dont le prix est : $x R_m$. On devra donc avoir : $C_m = x + x R_m = x(1 + R_m)$

$$x = \frac{1 - r R_m}{1 + R_m}.$$

Tontines.

On appelle ainsi du nom de l'Italien Tonti qui le premier les avait établi, des associations constituées de la manière suivante. A un moment déterminé des individus apportaient à un banquier une somme S et ils recevaient en échange un contrat de rente payable jusqu'au dernier survivant. Cette rente était d'ailleurs répartie chaque année entre les survivants proportionnellement à leur contribution dans la somme S.

Nous nous proposons ici de déterminer la somme x à payer par le banquier jusqu'au dernier survivant pour une somme S qu'il aura reçue.

Soient $p, p', p'' \ldots$ les probabilités que premier le deuxième..., ont de vivre dans n années. En désignant $1-p, 1-p', \ldots$ par $q, q', q'' \ldots$ le produit $q q' q'' \ldots$ sera la probabilité pour qu'il n'en existe plus un seul dans n années et $1 - q q' q'' \ldots$ sera celle pour qu'il en existe encore au moins un. En désignant par $\pi_1, \pi_2, \pi_3 \ldots$ ce que devient cette probabilité $1 - q q' q'' \ldots$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ La règle de l'espérance mathématique donnera évidemment

$$S = \frac{x}{1+r}\pi_1 + \frac{x}{(1+r)^2}\pi_2 + \cdots$$

Amortissements.

Dans certaines circonstances un gouvernement peut avoir besoin de contracter un emprunt avec les particuliers. Cet emprunt peut être fait à un taux quelconque, supposons pour fixer les idées, qu'il ait été fait à 5% et que pour en

Servir l'intérêt aux rentiers sur l'état, il fallait prélever chaque année un impôt de 5000000 francs. Au lieu de prélever cette somme on exigeait 6000000 francs par exemple, des contribuables. Cinq millions étaient alloués au paiement de la rente et l'autre million était envoyé à une compagnie particulière appelée Caisse d'Amortissement. Avec ce million la caisse d'amortissement rachetait sur la place pour un million de rentes. De sorte que l'année suivante elle se trouvait posséder outre le million qui lui était alloué par les contributions, les rentes de ce capital, ce qui lui faisait dans le cas que nous considérons 1050000 francs. Avec cette nouvelle somme elle rachetait un nouveau nombre de coupons de rente et l'on conçoit facilement, sans entrer ici dans de plus amples détails, qu'avec ce système d'accumulations et de rentrées, la caisse d'amortissement finira après un certain nombre d'années par avoir recouvré pour l'Etat tous les coupons qu'il avait été obligé d'émettre lors de la contraction de l'emprunt.

On a calculé que lorsqu'on consacre $1/10^e$ du capital à l'amortissement, il fallait à

5 % . . . . 36 ans.
à 4 % . . . . 41 ans
et à 3 % . . . . 47 ans.

Ce mode d'amortissement n'est plus guère en usage.

Fin du Cours d'Analyse.